



SERIES PUBLICATION.

LEHRBUCH

DER

DARSTELLENDE GEOMETRIE

VON

DR. KARL ROHN

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK  
AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

UND DR. ERWIN PAPPERITZ

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK  
AN DER BERGAKADEMIE FREIBERG

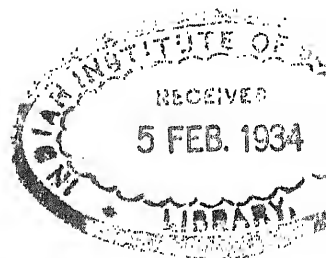
IN DREI BÄNDEN

ZWEITER BAND

AXONOMETRIE, PERSPEKTIVE, BELEUCHTUNG.

MIT 118 FIGUREN IM TEXT.

VIERTE, UMGearbeitete AUFLAGE



5188

516.36

N16.2

# Inhalt.

## Erstes Kapitel.

### Schiefe Parallelprojektion und axonometrische Projektion.

#### Allgemeines.

	Seite
1. 2. Schiefe Parallelprojektion, Anschaulichkeit der Bilder . . . . .	1
3. Einzige Bildebene, die Horizontalebene als Hilfsebene. Beziehung des Objektes auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem; Koordinatenzug eines Punktes und seine Abbildung . . . . .	3
4. Entwicklung des axonometrischen Bildes aus Grund- und Aufriß. Die Bestimmung des Umrisses bei Flächen . . . . .	4
5. Axonometrische Skizze . . . . .	5
6. Verschiedene Arten der axonometrischen Projektion; die schiefe Parallelprojektion und die (orthogonale) axonometrische Projektion im engeren Sinne . . . . .	5
7. Satz von Pohlke . . . . .	7
8. 9. Konstruktive Bestimmung der Lage eines rechtwinklig-gleichschenkligen Achsenkreuzes gegenüber seinem Bilde . . . . .	7

#### Das Verfahren

#### der schiefen Projektion, wenn Bild- und Aufrißebene zusammenfallen.

10. Bestimmungsstücke der schiefen Projektion. Der Aufriß als Bildebene. Sehstrahlen, Verkürzungsverhältnis . . . . .	11
11—13. Darstellung der Punkte, Geraden und Ebenen . . . . .	12
14. Affinität zwischen Bild und Grundrißbild einer ebenen Figur. Beispiele: Verbindungs- und Schnittelemente . . . . .	14
15. Wahre Länge einer Strecke . . . . .	16
16. 17. Wahre Gestalt einer ebenen Figur . . . . .	17
18. Lot auf eine Ebene . . . . .	19
19. Senkrechter Abstand eines Punktes von einer Geraden . . . . .	20
20. Winkel zweier Geraden . . . . .	21
21. Kürzester Abstand zweier Geraden . . . . .	22
22. Schattenkonstruktion . . . . .	23

#### Anwendungen der schiefen Projektion.

23. Ebenflächige Gebilde, Eigen- und Schlagschatten (sechseitige Pyramide und regelmäßiges Zwölfflach) . . . . .	24
24. Der gerade Kreiszylinder und sein ebener Schnitt . . . . .	25
25. Der gerade Kreiskegel, Lichtgrenze und Schlagschatten . . . . .	27
26. Die Kugel, ihre Hauptschnitte, Lichtgrenze und Schlagschatten . . . . .	29
27. Das Ellipsoid . . . . .	31



Seite

**Das Verfahren der schiefen Projektion, wenn Bild- und Aufrißebene vertikal, aber gegeneinander geneigt sind.**

34. Bestimmungsstücke, Sehstrahl, Bilder der Achsen . . . . .	41
35. Bestimmung der Achsen aus ihren Bildern . . . . .	43
36. Spezielle Fälle des Achsenkreuzes; die Normalen zur Bildebene werden parallel zur $x$ -Achse abgebildet . . . . .	43
37. Bild eines Tonnengewölbes mit Stiehkappengewölbe aus Auf- und Seitenriß entwickelt; Eigen- und Schlagschatten . . . . .	44
38. Methode zur Entwicklung des Bildes aus Grund- und Aufriß . . . . .	47
39. Wahre Länge einer Strecke . . . . .	48
40. Drehung einer Ebene parallel zur Bildebene . . . . .	49
41. Wahre Gestalt eines Dreieckes; Errichtung einer Normalen auf seiner Ebene . . . . .	50
42. Umriß und Lichtgrenze eines Kegels . . . . .	51
43. Umriß, Lichtgrenze und Schlagschatten einer Rotationsfläche . . . . .	53
44. Freitragende Wendeltreppe, Eigen- und Schlagschatten . . . . .	56

**Das Verfahren der orthogonalen axonometrischen Projektion.**

45. Die Bestimmung der orthogonalen axonometrischen Projektion durch Bildebene und Koordinatensystem . . . . .	58
46. Das Achsenkreuz und sein Bild. Verkürzungsverhältnisse. Verhältniszahlen. Spurendreieck . . . . .	58
47. Bestimmung des Koordinatensystems aus dem Spurendreieck und der Verkürzungsverhältnisse aus den Richtungen der Achsenbilder . . . . .	59
48. Bestimmung des Bildes vom Achsenkreuz aus den Verhältniszahlen . . . . .	60
49. Natürlicher Maßstab. Maßstab des Bildes. Achsenmaßstäbe. Sinusmaßstab . . . . .	61
50. Isometrische, dimetrische und trimetrische Projektion. Vergleichung der axonometrischen Projektionsarten in bezug auf ihre Bildwirkung . . . . .	62
51. Punkt, Gerade und Ebene in axonometrischer Projektion . . . . .	63
52. Lot aus einem Punkte auf eine Gerade, wenn beide in einer Koordinatenebene liegen . . . . .	64
53. Wahre Länge einer Strecke . . . . .	64
54. Lot aus einem Punkte auf eine Ebene . . . . .	65
55. Umlegung einer Ebene um ihre Bildspur in die Bildebene . . . . .	66
56. Winkel zweier Geraden . . . . .	67
57. Kristallformen (Rhombendodekaëder und Trapezoëder) . . . . .	67
58. Die Kugel, Eigen- und Schlagschatten . . . . .	69
59. Darstellung eines auf $\Pi_1$ stehenden Rotationskegels und eines liegenden Rotationszylinders mit Eigen- und Schlagschatten . . . . .	70

		Selt
	64. Vereinigte Lage einer Geraden und einer Ebene; Parallelismus	70
	65. Umlegung einer Ebene in die Bildebene . . . . .	70
	66. Die wahre Gestalt eines Dreiecks . . . . .	71
67.	68. Die wahre Länge einer Strecke; Teilungspunkt . . . . .	72
	69. Darstellung des Punktes durch Bild und orthogonale Projektion oder Abstand . . . . .	80
	70. Schnittpunkt einer Geraden und einer Ebene . . . . .	80
	71. Die Parallele zu einer Geraden durch einen gegebenen Punkt	81
	72. Die gemeinsame Sekante zweier Geraden durch einen gegebenen Punkt; eine Gerade durch zwei Punkte . . . . .	81
	73. In einer Ebene die Geraden von gegebenem Neigungswinkel zu ziehen; Winkel zweier Geraden . . . . .	82
	74. Die Normale zu einer Ebene und die Normalebene zu einer Geraden . . . . .	83
	75. Durch eine Gerade die Normalebene zu einer gegebenen Ebene zu legen . . . . .	85
	76. Die Geraden einer Ebene, die mit einer bestimmten Geraden außerhalb der Ebene einen gegebenen Winkel einschließen . . . . .	85
	77. Die gemeinsame Normale zweier Geraden . . . . .	87
	78. Die Geraden, die mit zwei windschiefen Geraden bestimmte Winkel einschließen . . . . .	87
	<b>Perspektive Darstellung von Körpern und Flächen.</b>	
	79. Zusammenhang zwischen orthogonaler und Zentralprojektion; die Bildebene ist zugleich die Aufrißebene . . . . .	89
	80. Die Aufrißebene ist gegen die Bildebene geneigt, die Grundriß- ebene zu ihr senkrecht . . . . .	90
	81. Beide Projektionsebenen sind gegen die Bildebene geneigt . . . . .	92
	82. Das schiefe Prisma; sein Normalschnitt . . . . .	92
	83. Der schiefe Zylinder und sein Schnitt; seine Lichtgrenze . . . . .	94
	84. Der gerade Kreiskegel und seine Lichtgrenze . . . . .	98
	85. Die Kugel . . . . .	100
	86. Die Lichtgrenze auf der Kugel bei Zentralbelichtung . . . . .	101
	87. Rotationsfläche mit zur Bildebene paralleler Achse . . . . .	104
	88. Rotationsfläche mit beliebig gerichteter Achse . . . . .	106
89.	90. Der Umriß einer Fläche 2. Grades, von der die Bilder dreier konjugierter Durchmesser gegeben sind . . . . .	106

### Drittes Kapitel. Angewandte Perspektive.

#### Allgemeines.

91.	Hauptaufgabe der angewandten Perspektive . . . . .	109
92.	Grundebene, vertikale Bildebene, Grundlinie, Auge, Ver- schwindungsebene, Hauptpunkt, Distanz, Horizont, Distanz- kreis, Distanzpunkte. Lage des Objektes. Umgelegter Grund- und Aufriß. Umgelegtes Auge. Gerade und schräge Ansicht	110

### Das Verfahren der schiefen Projektion, wenn Bild- und Aufrißebene vertikal, aber gegeneinander geneigt sind.

34. Bestimmungsstücke, Sehstrahl, Bilder der Achsen . . . . .	41
35. Bestimmung der Achsen aus ihren Bildern . . . . .	43
36. Spezielle Fälle des Achsenkreuzes; die Normalen zur Bildebene werden parallel zur $x$ -Achse abgebildet . . . . .	43
37. Bild eines Tonnengewölbes mit Stiehkappengewölbe aus Auf- und Seitenriß entwickelt; Eigen- und Schlagschatten . . . . .	44
38. Methode zur Entwicklung des Bildes aus Grund- und Aufriß . . . . .	47
39. Wahre Länge einer Strecke . . . . .	48
40. Drehung einer Ebene parallel zur Bildebene . . . . .	49
41. Wahre Gestalt eines Dreieckes; Errichtung einer Normalen auf seiner Ebene . . . . .	50
42. Umriß und Lichtgrenze eines Kegels . . . . .	51
43. Umriß, Lichtgrenze und Schlagschatten einer Rotationsfläche . . . . .	53
44. Freitragende Wendeltreppe, Eigen- und Schlagschatten . . . . .	56

### Das Verfahren der orthogonalen axonometrischen Projektion.

45. Die Bestimmung der orthogonalen axonometrischen Projektion durch Bildebene und Koordinatensystem . . . . .	58
46. Das Achsenkreuz und sein Bild. Verkürzungsverhältnisse. Verhältniszahlen. Spurendreieck . . . . .	58
47. Bestimmung des Koordinatensystems aus dem Spurendreieck und der Verkürzungsverhältnisse aus den Richtungen der Achsenbilder . . . . .	59
48. Bestimmung des Bildes vom Achsenkreuz aus den Verhältniszahlen . . . . .	60
49. Natürlicher Maßstab. Maßstab des Bildes. Achsenmaßstäbe. Sinusmaßstab . . . . .	61
50. Isometrische, dimetrische und trimetrische Projektion. Vergleichung der axonometrischen Projektionsarten in bezug auf ihre Bildwirkung . . . . .	62
51. Punkt, Gerade und Ebene in axonometrischer Projektion . . . . .	63
52. Lot aus einem Punkte auf eine Gerade, wenn beide in einer Koordinatenebene liegen . . . . .	64
53. Wahre Länge einer Strecke . . . . .	64
54. Lot aus einem Punkte auf eine Ebene . . . . .	65
55. Umlegung einer Ebene um ihre Bildspur in die Bildebene . . . . .	66
56. Winkel zweier Geraden . . . . .	67
57. Kristallformen (Rhombendodekaëder und Trapezoëder) . . . . .	67
58. Die Kugel, Eigen- und Schlagschatten . . . . .	69
59. Darstellung eines auf $\Pi_1$ stehenden Rotationskegels und eines liegenden Rotationszylinders mit Eigen- und Schlagschatten . . . . .	70

	Seite
64. Vereinigte Lage einer Geraden und einer Ebene; Parallelismus	76
65. Umlegung einer Ebene in die Bildebene . . . . .	76
66. Die wahre Gestalt eines Dreiecks . . . . .	77
67. 68. Die wahre Länge einer Strecke; Teilungspunkt . . . . .	78
69. Darstellung des Punktes durch Bild und orthogonale Projektion oder Abstand . . . . .	80
70. Schnittpunkt einer Geraden und einer Ebene . . . . .	80
71. Die Parallele zu einer Geraden durch einen gegebenen Punkt	81
72. Die gemeinsame Sekante zweier Geraden durch einen gegebenen Punkt; eine Gerade durch zwei Punkte . . . . .	81
73. In einer Ebene die Geraden von gegebenem Neigungswinkel zu ziehen; Winkel zweier Geraden . . . . .	82
74. Die Normale zu einer Ebene und die Normalebene zu einer Geraden . . . . .	83
75. Durch eine Gerade die Normalebene zu einer gegebenen Ebene zu legen . . . . .	85
76. Die Geraden einer Ebene, die mit einer bestimmten Geraden außerhalb der Ebene einen gegebenen Winkel einschließen .	85
77. Die gemeinsame Normale zweier Geraden . . . . .	87
78. Die Geraden, die mit zwei windschiefen Geraden bestimmte Winkel einschließen . . . . .	87
<b>Perspektive Darstellung von Körpern und Flächen.</b>	
79. Zusammenhang zwischen orthogonaler und Zentralprojektion; die Bildebene ist zugleich die Aufrißebene . . . . .	89
80. Die Aufrißebene ist gegen die Bildebene geneigt, die Grundriß- ebene zu ihr senkrecht . . . . .	90
81. Beide Projektionsebenen sind gegen die Bildebene geneigt . .	92
82. Das schiefe Prisma; sein Normalschnitt . . . . .	92
83. Der schiefe Zylinder und sein Schnitt; seine Lichtgrenze . .	94
84. Der gerade Kreiskegel und seine Lichtgrenze . . . . .	98
85. Die Kugel . . . . .	100
86. Die Lichtgrenze auf der Kugel bei Zentralbeleuchtung . . .	101
87. Rotationsfläche mit zur Bildebene paralleler Achse . . . . .	104
88. Rotationsfläche mit beliebig gerichteter Achse . . . . .	106
89. 90. Der Umriß einer Fläche 2. Grades, von der die Bilder dreier konjugierter Durchmesser gegeben sind . . . . .	106

### Drittes Kapitel. Angewandte Perspektive.

#### Allgemeines.

91. Hauptaufgabe der angewandten Perspektive . . . . .	109
92. Grundebene, vertikale Bildebene, Grundlinie, Auge, Ver- schwindungsebene, Hauptpunkt, Distanz, Horizont, Distanz- kreis, Distanzpunkte. Lage des Objektes. Umgelegter Grund- und Aufriß. Umgelegtes Auge. Gerade und schräge Ansicht	110

	Seite
101. Abbildung eines horizontalen Kreises . . . . .	117
102. Abbildung einer Ellipse mit vertikaler Achse . . . . .	118
103. Schattenkonstruktion. Zentral- und Parallelbeleuchtung, Sonnenbeleuchtung . . . . .	119
104. Schatten von Punkten und Geraden . . . . .	120
<b>Anwendungen der Perspektive.</b>	
105. Perspektive eines Säulenganges in gerader Ansicht . . . . .	120
106. Perspektive eines Obelisken mit Unterbau in schräger Ansicht	124
107. Schräge Ansicht einer gewölbten Halle . . . . .	127
108. Schräge Ansicht einer Nische . . . . .	130
109. Perspektive eines runden Säulienstumpfes . . . . .	133
<b>Zentralkollineation räumlicher Figuren (Reliefperspektive).</b>	
110. 111. Grundgesetze der räumlichen Zentralkollineation. Zentrum, Kollineationsebene, Gegenebenen . . . . .	136
112. 113. Reliefperspektive. Auge, Spurebene, Fluchtebene, Verschwin- dungsebene, Grundebene, Grundlinie, Hauptpunkt, Distanz, Tiefe des Reliefs . . . . .	137
114. Reliefbild einer Geraden, eines Punktes, einer Ebene . . . . .	138
115. Beziehungen zwischen den Grund- und Aufrissen von Original und Reliefbild. Beispiel (Obelisk) . . . . .	138
116. Affinität, Ähnlichkeit und Kongruenz räumlicher Figuren als Spezialfälle der Zentralkollineation des Raumes. Anwendung der Kollinearverwandtschaft auf die Theorie der Flächen	139
<b>Viertes Kapitel. Beleuchtung von Flächen.</b>	
117—119. Allgemeines. Definition der Lichtgleichen . . . . .	141
120. Der gerade Zylinder senkrecht zum Grundriß . . . . .	144
121. Der gerade Zylinder in schiefer Lage . . . . .	146
122. Der schiefe Zylinder, insbesondere der schiefe Kreiszylinder	148
123. Der Rotationskegel mit einer zum Grundriß normalen Achse	150
124. Der Rotationskegel in schiefer Lage . . . . .	151
125. Der schiefe Kreiskegel . . . . .	152
126. Die Kugel . . . . .	154
127—129. Rotationsflächen; Kugel-, Kegel- und Zylinderverfahren . . . . .	155
130. Die Ringfläche . . . . .	159
131. Die Schraubenflächen; die Punkte ihrer Lichtgleichen auf den Schraubenlinien . . . . .	160
132. Schraubenfläche mit kreisförmigem Meridianschnitt . . . . .	163
133. Die Punkte der Lichtgleichen auf den Erzeugenden der Regel- schraubenflächen . . . . .	165
134. Die geschlossene, schiefe Regelschraubenfläche . . . . .	167
135. 136. Das Ellipsoid . . . . .	171
137. Die Hyperboloide . . . . .	174
138. 139. Die Paraboloiden . . . . .	177

## ERSTES KAPITEL.

---

### Schiefe Parallelprojektion und axonometrische Projektion.

#### Allgemeines.

1. Das Grund- und Aufrißverfahren, das im I. Bande eine ausführliche Behandlung erfahren und mannigfache Anwendungen gefunden hat, ist bei der Darstellung räumlicher Gebilde zumeist in Gebrauch. Es sind hierfür insbesondere zwei Gründe maßgebend; erstens zeichnen sich die dabei angewendeten Konstruktionen durch besondere Einfachheit aus, zweitens sind die wahren Maßverhältnisse von Strecken, Winkeln oder einzelnen Teilen des räumlichen Gebildes leicht aus seinen beiden Rissen zu entnehmen.

Der Darstellung eines Gebildes durch orthogonale Projektion stellt sich seine Darstellung durch schiefe Parallelprojektion<sup>1)</sup> an die Seite. Entbehrt diese Darstellungsweise vielfach jener Einfachheit der Konstruktion, die der orthogonalen Projektion eigen ist, so bietet sie als Ersatz dafür ein Bild des Gegenstandes, das sich durch außerordentlich große Anschaulichkeit auszeichnet. In dieser Richtung wird sie freilich noch von dem perspektiven Bild, dessen gesetzmäßige Entwicklung im folgenden Kapitel behandelt wird, übertroffen; dieses gibt unseren Gesichtseindruck von dem Gegenstand am vollkommensten wieder und gleicht hierin ganz dem durch eine photographische Aufnahme hergestellten Bilde. Bei Gegenständen von geringer räumlicher Ausdehnung steht jedoch das durch schiefe Parallelprojektion erzielte Bild dem perspektiven Bild nur wenig an Anschaulichkeit nach; es ist indessen leichter zu entwerfen und gestattet eine einfachere Entnahme der Maße des Gegenstandes aus seiner Zeichnung.

lichen und technischen Apparaten, weil die Kanten dieser Objekte vorzugsweise nach drei zueinander senkrechten Richtungen (nach der Breite, Höhe und Tiefe) verlaufen. Man findet sie darum in wissenschaftlichen und technischen Werken häufig für die erläuternden Textfiguren angewandt, und so ist sie auch im I. Bande dieses Buches bereits mehrfach stillschweigend benutzt worden, um räumliche Gebilde in Ermangelung von Modellen durch die Zeichnung der Anschauung näher zu bringen.

2. Die Hauptschwierigkeit, die richtige Vorstellung von einem Gegenstand aus seinem Grund- und Aufriß zu erlangen, besteht darin, daß für die beiden Risse verschiedene Projektionsrichtungen benutzt werden, und daß die Ebenen der Risse in Wirklichkeit aufeinander senkrecht stehen, in der Darstellung durch die Zeichnung aber zusammenfallen. Man hat es also mit zwei ganz verschiedenen Bildern (Projektionen) des Gegenstandes zu tun, von denen aber keines für sich allein genügt, eine richtige Vorstellung von ihm zu erwecken. Um diese zu gewinnen muß erst ein Denkprozeß stattfinden, der beide Risse zu einer einzigen, Gestalt und Lage des Objekts umfassenden Vorstellung kombiniert. Dieser Denkprozeß deckt sich jedoch keineswegs mit dem uns so geläufigen, durch den die beiden Netzhautbilder eines Gegenstandes zu einer Gesamtvorstellung von ihm verschmelzen. Denn einerseits befinden sich die beiden Netzhautbilder in einer, wie man wohl kurz sagen darf, natürlichen relativen Lage zueinander, was bei Grund- und Aufriß durchaus nicht der Fall ist, und andererseits schließen die projizierenden Strahlen, welche die beiden Netzhautbilder eines Punktes liefern, nur einen sehr kleinen Winkel miteinander ein.

Bekanntlich vermittelt auch das Sehen mit einem Auge eine räumliche Vorstellung von den Dingen, wobei freilich die Lichtverteilung und die Schärfe der einzelnen Teile des im Auge erzeugten Bildes eine wesentliche Rolle spielen. Gleichwohl sind Irrtümer hierbei nicht selten. Solche Irrtümer sind jedoch ausgeschlossen, sobald der Gegenstand sich über einer horizontalen Fläche erhebt, und wir irgendwie in den Stand gesetzt sind die relative Lage seiner einzelnen Teile (Ecken, Kanten usw.) ihr gegenüber zu beurteilen. Von diesem Umstande macht auch die schiefe Parallelprojektion Gebrauch indem sie eine Horizontalebene zu Hilfe nimmt und das räumliche

punkt  $P$  liegenden Punkt der Horizontalebene und zeichnet von beiden die schiefe Parallelprojektion  $P'_s$  und  $P_s$ , so ist die Lage des Raumpunktes völlig bestimmt, wenn die Projektionsrichtung und die Lage der Horizontalebene gegen die Bildebene bekannt sind. Es wird indessen nicht nötig sein zu jedem Raumpunkt den senkrecht darunter liegenden Punkt der Horizontalebene anzugeben, vielmehr wird es genügen, dieses nur für eine Anzahl Punkte zu tun; die Lage der übrigen geht dann aus ihren Verbindungslinien mit diesen hervor.

3. Die schiefe Parallelprojektion bedient sich, wie schon bemerkt, nur einer einzigen Bildebene; sie muß aber neben den Bildern der Punkte und Linien im Raume auch die Bilder ihrer orthogonalen Projektionen auf eine Horizontalebene angeben. Doch genügt es zumeist die Bilder der orthogonalen Projektionen nur für eine kleine Anzahl von Punkten und Linien zu zeichnen. Reicht sonach eine einzige Horizontalebene aus, um ein räumliches Gebilde mittels seiner Lagebeziehung zu ihr in schiefer Parallelprojektion darzustellen, so ist es doch von Vorteil drei zueinander rechtwinklige Achsen zugrunde zu legen und ihre Lage gegen das Gebilde bei der Konstruktion seiner Parallelprojektion zu verwerten.

Die drei rechtwinkligen Achsen, auf die wir den abzubildenden Gegenstand beziehen, werden Koordinatenachsen genannt und mit  $x, y, z$  bezeichnet. Je zwei bestimmen die drei zueinander senkrechten Koordinatenebenen, nämlich  $\Pi_1 = xy$ ,  $\Pi_2 = xz$ ,  $\Pi_3 = yz$ , denen wir wie früher beziehentlich die Namen Grundriß-, Aufriß- und Seitenrißebene beilegen werden. Der Achsenschnittpunkt heißt Anfangspunkt oder Ursprung  $O$ . Unter den Koordinaten  $x, y, z$  eines Punktes versteht man seine parallel zu den gleichbenannten Achsen genommenen und mit bestimmten Vorzeichen versehenen Abstände von den Koordinatenebenen. Fügt man, vom Ursprung  $O$  beginnend, die Koordinaten eines Punktes in irgend einer Reihenfolge und in den gehörigen Richtungen aneinander, so entsteht ein Koordinatenzug, der in dem betreffenden Punkte selbst endigt.

Ist nun die Parallelprojektion der drei Koordinatenachsen gegeben und für jede der Maßstab, d. h. das Verhältnis einer auf ihr abgetragenen Bildstrecke zur wahren Länge dieser Strecke, bekannt, so kann nach der Construction der Parallelprojektion



einer Raumfigur durch die der Koordinaten ihrer Punkte zu bestimmen, heißt *Axonometrie*.<sup>2)</sup>

4. Die axonometrische Projektion wird nach Annahme eines festen Koordinatensystems, auf das man den abzubildenden Gegenstand bezieht, durch die Stellung der Bildebene zu diesem und die Richtung der projizierenden Strahlen bestimmt. Die Wahl des Koordinatensystems ist ohne Wirkung auf das Bild, wenn man die Projektionsrichtung und die Lage des Gegenstandes gegenüber der Bildebene festhält. Man wird das Koordinatensystem deshalb so annehmen dürfen, daß seine Lage bezüglich des darzustellenden Gegenstandes so einfach wie nur möglich ist; dann werden sein Grund-, Auf- und Seitenriß, d. h. seine orthogonalen Projektionen auf die Koordinatenebenen, eine möglichst einfache Form annehmen.

Liegen zwei Risse eines Gegenstandes gezeichnet vor, so kann man aus ihnen die Koordinaten seiner einzelnen Punkte direkt abgreifen und sonach sein axonometrisches Bild, wie schon vorher dargestellt, entwerfen. Hierzu ist kaum etwas weiteres hinzuzufügen, soweit es sich um eine punktweise Übertragung des Bildes aus den Rissen handelt. Auch die Lichtgrenze, sowie ihr Schlagschatten können übertragen werden, wenn sie in den Rissen gezeichnet vorliegen. Dagegen erfordern die bei dem axonometrischen Bilde in Erscheinung tretenden krummlinigen Umrissse eine besondere Konstruktion. Es hat das etwa in der folgenden Weise zu geschehen. Man zeichne in den vorliegenden Grund- und Aufriß des Gegenstandes die Risse eines Sehstrahls  $s$  ein, der zur Projektionsrichtung parallel ist, und bestimme mit ihrer Hilfe Grund- und Aufriß des zu dieser Sehstrahlrichtung gehörigen Umrisses, worauf man aus beiden das axonometrische Bild des Umrisses durch Übertragen gewinnt.

Bei der Konstruktion des geradlinigen Umrisses von Zylinder und Kegel wird man auch leicht direkt ans Ziel gelangen, nachdem man das Bild der Basiskurve und das Bild einer Mantellinie des Zylinders oder der Spitze des Kegels gezeichnet hat. Bei den Regelflächen (Regelschraubenflächen usw.) wird sich der Umriss unmittelbar als Hüllkurve der Bilder seiner Erzeugenden ergeben. Bei den Rotations- und allgemeinen Schraubenflächen wird man jedoch die in Kap. VIII und X Bd. I dargelegten Verfahren zu verwenden haben, um zunächst Grund- und Aufriß des zu der vorgeschriebenen Sehstrahlrichtung gehörigen Umrisses zu zeichnen. Die daselbst durchgeführten Methoden und Konstruktionen zur Bestimmung der Licht-

grenze sind ohne weiteres hier zur Anwendung zu bringen; es tritt nur an Stelle des Lichtstrahles der Sehstrahl und somit an Stelle der Lichtgrenze der zur Sehstrahlrichtung gehörige Umriß.

5. Kann man somit das Entwerfen des axonometrischen Bildes eines Gegenstandes mit Hilfe seiner Risse als erledigt ansehen, insofern ja das punktweise Übertragen keinerlei Schwierigkeiten bietet, so verändert sich die Sachlage durchaus, sobald es sich um die konstruktive Entwicklung des Bildes aus bekannten Daten und Eigenschaften des abzubildenden Gegenstandes handelt. Gerade in dieser Form liegt die Aufgabe oft vor, wenn von einem Objekt ein axonometrisches Bild skizziert werden soll; gewöhnlich wird man dann nicht erst vorher seinen Grund- und Aufriß zeichnen. Es werden deshalb im folgenden in erster Linie solche Konstruktionen zu behandeln sein, die unmittelbar in der axonometrischen Figur selbst vorgenommen werden. Diese Konstruktionen gestalten sich, wie wir sehen werden, wesentlich verschieden je nach der Lage der Bildebene und der Projektionsrichtung gegenüber den Koordinatenachsen.

6. Das allgemeinste axonometrische Bild erhält man, wenn man die Bildebene gegen die Projektionsrichtung geneigt annimmt, und beide gegen das feste Koordinatensystem eine beliebige geneigte Lage besitzen. Will man die axonometrische Projektion in dieser allgemeinen Form anwenden, so benutzt man dabei am besten die vorher besprochene Übertragung mittels Grund- und Aufriß, d. h. mittels der orthogonalen Projektionen auf die  $x y$ -Ebene und die  $x z$ -Ebene, da die direkten Konstruktionen in der axonometrischen Figur zu kompliziert werden. Man erreicht indes den Zweck, welcher der axonometrischen Abbildung zugrunde liegt und in der Erzielung eines Bildes von größerer Anschaulichkeit besteht, schon durch speziellere Annahmen über die gegenseitige Lage von Achsensystem, Bildebene und Projektionsrichtung; unter ihnen wird man natürlich denjenigen den Vorzug geben, welche die möglichste Einfachheit der Konstruktion gewähren und zugleich eine möglichst plastische Wirkung des Bildes erzielen. Es ist deshalb bei ihrer Auswahl im einzelnen Falle darauf zu achten, daß keine der wichtigeren Kanten und Seitenflächen des darzustellenden Gegenstandes als bloßer Punkt, bzw. als Gerade erscheine. Demgemäß finden — abgesehen von der schon erwähnten allgemeinen Lage — vornehmlich folgende drei speziellere Annahmen eine ausgedehntere Anwendung.

a) Man wählt die Bildebene parallel zu einer Koordinatenebene — der Aufriß- oder  $x z$ -Ebene — oder läßt sie mit ihr zusammenfallen und führt eine schiefe Projektion

einer Raumfigur durch die der Koordinaten ihrer Punkte zu bestimmen, heißt *Axonometrie*.<sup>2)</sup>

4. Die axonometrische Projektion wird nach Annahme eines festen Koordinatensystems, auf das man den abzubildenden Gegenstand bezieht, durch die Stellung der Bildebene zu diesem und die Richtung der projizierenden Strahlen bestimmt. Die Wahl des Koordinatensystems ist ohne Wirkung auf das Bild, wenn man die Projektionsrichtung und die Lage des Gegenstandes gegenüber der Bildebene festhält. Man wird das Koordinatensystem deshalb so annehmen dürfen, daß seine Lage bezüglich des darzustellenden Gegenstandes so einfach wie nur möglich ist; dann werden sein Grund-, Auf- und Seitenriß, d. h. seine orthogonalen Projektionen auf die Koordinatenebenen, eine möglichst einfache Form annehmen.

Liegen zwei Risse eines Gegenstandes gezeichnet vor, so kann man aus ihnen die Koordinaten seiner einzelnen Punkte direkt abgreifen und sonach sein axonometrisches Bild, wie schon vorher dargestellt, entwerfen. Hierzu ist kaum etwas weiteres hinzuzufügen, soweit es sich um eine punktweise Übertragung des Bildes aus den Rissen handelt. Auch die Lichtgrenze, sowie ihr Schlagschatten können übertragen werden, wenn sie in den Rissen gezeichnet vorliegen. Dagegen erfordern die bei dem axonometrischen Bilde in Erscheinung tretenden krummlinigen Umrisse eine besondere Konstruktion. Es hat das etwa in der folgenden Weise zu geschehen. Man zeichne in den vorliegenden Grund- und Aufriß des Gegenstandes die Risse eines Sehstrahls  $s$  ein, der zur Projektionsrichtung parallel ist, und bestimme mit ihrer Hilfe Grund- und Aufriß des zu dieser Sehstrahlrichtung gehörigen Umrisses, worauf man aus beiden das axonometrische Bild des Umrisses durch Übertragen gewinnt.

Bei der Konstruktion des geradlinigen Umrisses von Zylinder und Kegel wird man auch leicht direkt ans Ziel gelangen, nachdem man das Bild der Basiskurve und das Bild einer Mantellinie des Zylinders oder der Spitze des Kegels gezeichnet hat. Bei den Regelflächen (Regelschraubenflächen usw.) wird sich der Umriß unmittelbar als Hüllkurve der Bilder seiner Erzeugenden ergeben. Bei den Rotations- und allgemeinen Schraubenflächen wird man jedoch die in Kap. VIII und X Bd. I dargelegten Verfahren zu verwenden haben, um zunächst Grund- und Aufriß des zu der vorgeschriebenen Sehstrahlrichtung gehörigen Umrisses zu zeichnen. Die daselbst durchgeführten Methoden und Konstruktionen zur Bestimmung der Licht-

grenze sind ohne weiteres hier zur Anwendung zu bringen; es tritt nur an Stelle des Lichtstrahles der Sehstrahl und somit an Stelle der Lichtgrenze der zur Sehstrahlrichtung gehörige Umriß.

5. Kann man somit das Entwerfen des axonometrischen Bildes eines Gegenstandes mit Hilfe seiner Risse als erledigt ansehen, insofern ja das punktweise Übertragen keinerlei Schwierigkeiten bietet, so verändert sich die Sachlage durchaus, sobald es sich um die konstruktive Entwicklung des Bildes aus bekannten Daten und Eigenschaften des abzubildenden Gegenstandes handelt. Gerade in dieser Form liegt die Aufgabe oft vor, wenn von einem Objekt ein axonometrisches Bild skizziert werden soll; gewöhnlich wird man dann nicht erst vorher seinen Grund- und Aufriß zeichnen. Es werden deshalb im folgenden in erster Linie solche Konstruktionen zu behandeln sein, die unmittelbar in der axonometrischen Figur selbst vorgenommen werden. Diese Konstruktionen gestalten sich, wie wir sehen werden, wesentlich verschieden je nach der Lage der Bildebene und der Projektionsrichtung gegenüber den Koordinatenachsen.

6. Das allgemeinste axonometrische Bild erhält man, wenn man die Bildebene gegen die Projektionsrichtung geneigt annimmt, und beide gegen das feste Koordinatensystem eine beliebige geneigte Lage besitzen. Will man die axonometrische Projektion in dieser allgemeinen Form anwenden, so benutzt man dabei am besten die vorher besprochene Übertragung mittels Grund- und Aufriß, d. h. mittels der orthogonalen Projektionen auf die  $xy$ -Ebene und die  $xz$ -Ebene, da die direkten Konstruktionen in der axonometrischen Figur zu kompliziert werden. Man erreicht indes den Zweck, welcher der axonometrischen Abbildung zugrunde liegt und in der Erzielung eines Bildes von größerer Anschaulichkeit besteht, schon durch speziellere Annahmen über die gegenseitige Lage von Achsensystem, Bildebene und Projektionsrichtung; unter ihnen wird man natürlich denjenigen den Vorzug geben, welche die möglichste Einfachheit der Konstruktion gewähren und zugleich eine möglichst plastische Wirkung des Bildes erzielen. Es ist deshalb bei ihrer Auswahl im einzelnen Falle darauf zu achten, daß keine der wichtigeren Kanten und Seitenflächen des darzustellenden Gegenstandes als bloßer Punkt, bzw. als Gerade erscheine. Demgemäß finden — abgesehen von der schon erwähnten allgemeinen Lage — vornehmlich folgende drei speziellere Annahmen eine ausgedehntere Anwendung.

a) Man wählt die Bildebene parallel zu einer Koordinatenebene — der Aufriß- oder  $xz$ -Ebene — oder läßt sie mit ihr zusammenfallen und führt eine schiefe Projektion

einer Raumfigur durch die der Koordinaten ihrer Punkte zu bestimmen, heißt *Axonometrie*.<sup>2)</sup>

4. Die axonometrische Projektion wird nach Annahme eines festen Koordinatensystems, auf das man den abzubildenden Gegenstand bezieht, durch die Stellung der Bildebene zu diesem und die Richtung der projizierenden Strahlen bestimmt. Die Wahl des Koordinatensystems ist ohne Wirkung auf das Bild, wenn man die Projektionsrichtung und die Lage des Gegenstandes gegenüber der Bildebene festhält. Man wird das Koordinatensystem deshalb so annehmen dürfen, daß seine Lage bezüglich des darzustellenden Gegenstandes so einfach wie nur möglich ist; dann werden sein Grund-, Auf- und Seitenriß, d. h. seine orthogonalen Projektionen auf die Koordinatenebenen, eine möglichst einfache Form annehmen.

Liegen zwei Risse eines Gegenstandes gezeichnet vor, so kann man aus ihnen die Koordinaten seiner einzelnen Punkte direkt abgreifen und sonach sein axonometrisches Bild, wie schon vorher dargestellt, entwerfen. Hierzu ist kaum etwas weiteres hinzuzufügen, soweit es sich um eine punktweise Übertragung des Bildes aus den Rissen handelt. Auch die Lichtgrenze, sowie ihr Schlagschatten können übertragen werden, wenn sie in den Rissen gezeichnet vorliegen. Dagegen erfordern die bei dem axonometrischen Bilde in Erscheinung tretenden krummlinigen Umrissse eine besondere Konstruktion. Es hat das etwa in der folgenden Weise zu geschehen. Man zeichne in den vorliegenden Grund- und Aufriß des Gegenstandes die Risse eines Sehstrahls  $s$  ein, der zur Projektionsrichtung parallel ist, und bestimme mit ihrer Hilfe Grund- und Aufriß des zu dieser Sehstrahlrichtung gehörigen Umrisses, worauf man aus beiden das axonometrische Bild des Umrisses durch Übertragen gewinnt.

Bei der Konstruktion des geradlinigen Umrisses von Zylinder und Kegel wird man auch leicht direkt ans Ziel gelangen, nachdem man das Bild der Basiskurve und das Bild einer Mantellinie des Zylinders oder der Spitze des Kegels gezeichnet hat. Bei den Regelflächen (Regelschraubenflächen usw.) wird sich der Umriß unmittelbar als Hüllkurve der Bilder seiner Erzeugenden ergeben. Bei den Rotations- und allgemeinen Schraubenflächen wird man jedoch die in Kap. VIII und X Bd. I dargelegten Verfahren zu verwenden haben, um zunächst Grund- und Aufriß des zu der vorgeschriebenen Sehstrahlrichtung gehörigen Umrisses zu zeichnen. Die daselbst durchgeführten Methoden und Konstruktionen zur Bestimmung der Licht-

grenze sind ohne weiteres hier zur Anwendung zu bringen; es tritt nur an Stelle des Lichtstrahles der Sehstrahl und somit an Stelle der Lichtgrenze der zur Sehstrahlrichtung gehörige Umriß.

5. Kann man somit das Entwerfen des axonometrischen Bildes eines Gegenstandes mit Hilfe seiner Risse als erledigt ansehen, insofern ja das punktweise Übertragen keinerlei Schwierigkeiten bietet, so verändert sich die Sachlage durchaus, sobald es sich um die konstruktive Entwicklung des Bildes aus bekannten Daten und Eigenschaften des abzubildenden Gegenstandes handelt. Gerade in dieser Form liegt die Aufgabe oft vor, wenn von einem Objekt ein axonometrisches Bild skizziert werden soll; gewöhnlich wird man dann nicht erst vorher seinen Grund- und Aufriß zeichnen. Es werden deshalb im folgenden in erster Linie solche Konstruktionen zu behandeln sein, die unmittelbar in der axonometrischen Figur selbst vorgenommen werden. Diese Konstruktionen gestalten sich, wie wir sehen werden, wesentlich verschieden je nach der Lage der Bildebene und der Projektionsrichtung gegenüber den Koordinatenachsen.

6. Das allgemeinste axonometrische Bild erhält man, wenn man die Bildebene gegen die Projektionsrichtung geneigt annimmt, und beide gegen das feste Koordinatensystem eine beliebige geneigte Lage besitzen. Will man die axonometrische Projektion in dieser allgemeinen Form anwenden, so benutzt man dabei am besten die vorher besprochene Übertragung mittels Grund- und Aufriß, d. h. mittels der orthogonalen Projektionen auf die  $xy$ -Ebene und die  $xz$ -Ebene, da die direkten Konstruktionen in der axonometrischen Figur zu kompliziert werden. Man erreicht indes den Zweck, welcher der axonometrischen Abbildung zugrunde liegt und in der Erzielung eines Bildes von größerer Anschaulichkeit besteht, schon durch speziellere Annahmen über die gegenseitige Lage von Achsensystem, Bildebene und Projektionsrichtung; unter ihnen wird man natürlich denjenigen den Vorzug geben, welche die möglichste Einfachheit der Konstruktion gewähren und zugleich eine möglichst plastische Wirkung des Bildes erzielen. Es ist deshalb bei ihrer Auswahl im einzelnen Falle darauf zu achten, daß keine der wichtigeren Kanten und Seitenflächen des darzustellenden Gegenstandes als bloßer Punkt, bzw. als Gerade erscheine. Demgemäß finden — abgesehen von der schon erwähnten allgemeinen Lage — vornehmlich folgende drei speziellere Annahmen eine ausgedehntere Anwendung.

a) Man wählt die Bildebene parallel zu einer Koordinatenebene — der Aufriß- oder  $xz$ -Ebene — oder läßt sie mit ihr zusammenfallen und führt eine schiefe Projektion

aus. Dies bietet unter anderem den Vorteil, daß zwei Koordinaten eines jeden Punktes sich in ihrer wahren Länge und Richtung abbilden. Die dritte Koordinate wird in einer schrägen Richtung und meist in einem bestimmten Verhältnis verkürzt dargestellt. — Das nach diesem Verfahren entworfene Bild eines Objektes wirkt besonders anschaulich, wenn man es bei größerer Entfernung annähernd in der Richtung der projizierenden Strahlen betrachtet.

$\beta$ ) Man legt die Bildebene durch die vertikale  $z$ -Achse, aber gegen die  $x$ - und  $y$ -Achse geneigt, und führt dann eine schiefe Projektion aus. Hier behält nur noch die  $z$ -Koordinate ihre Richtung und Länge im Bilde bei, während die Bilder der beiden andern Koordinaten irgendwelche Winkel mit ihr einschließen und dabei jede für sich eine bestimmte Verkürzung oder Verlängerung erfahren. Dieses Verfahren ist in seinen Konstruktionen weniger einfach als das vorhergehende; es gestattet jedoch eine günstigere Wahl der Projektionsrichtung gegen die Bildebene. Man wählt sie zumeist so, daß eine zu ihr parallele Ebene durch die  $z$ -Achse auf der Bildebene senkrecht steht; dann geben die so erhaltenen Bilder bei gerader Gegenüberstellung des Beschauers eine anschauliche Wirkung (mit Übersicht). — Auch wenn man diese besondere Annahme über die Projektionsrichtung nicht macht, pflegt man bei ihrer Wahl nicht weit von jener abzuweichen.

$\gamma$ ) Man nimmt die Bildebene gegen alle drei Koordinatenachsen geneigt an und führt eine senkrechte Projektion aus. Auch hier gilt das gleiche für die Stellung des Beschauers gegenüber dem Bild wie bei  $\beta$ ).

Noch ist hervorzuheben, daß in unserer Vorstellung die räumlichen Gegenstände zur Vertikalrichtung meist in einer ausgeprägten Beziehung stehen. Dieses auch im axonometrischen Bilde hervortreten zu lassen und dadurch die anschauliche Wirkung zu erzielen, weil sie der gewohnten Vorstellung entspricht, sind die unter  $\alpha$ ) und  $\beta$ ) genannten Verfahren besonders geeignet, wobei man sich Bildebene und  $z$ -Achse vertikal gestellt denkt.

Die beiden unter  $\alpha$ ) und  $\beta$ ) angeführten Darstellungsmethoden bezeichnet man gewöhnlich schlechthin als schiefe Projektion, die unter  $\alpha$ ) im besonderen auch als Kavalierperspektive —, die unter  $\gamma$ ) angeführte als orthogonale Axonometrie oder auch kurz als axonometrische Projektion. Wir werden in der Folge beide Namen ebenfalls in dieser engeren Bedeutung gebrauchen. Ehe wir aber diese Methoden einzeln besprechen, müssen wir dem Fundamentalsatz der Axonometrie, der die Grundlage für die

allgemeinste axonometrische Projektion bildet, unsere Aufmerksamkeit zuwenden.

7. Trägt man vom Ursprung  $O$  aus auf jede der drei Koordinatenachsen  $x, y, z$  in positiver Richtung eine und dieselbe Strecke  $k = OA = OB = OC$  ab, so entsteht eine Figur  $OABC$ , die wir als rechtwinklig-gleichschenkliges Achsenkreuz  $\mathfrak{A}$  bezeichnen wollen. Für die Abbildung eines solchen Achsenkreuzes durch schiefe Projektion gilt der von Pohlke aufgefunden und nach ihm benannte Satz<sup>2)</sup>:

Irgend drei in einer Ebene  $\Pi$  aus einem Punkte  $O_s$  (in beliebiger Richtung und Länge) gezogene Strecken  $O_s A_s, O_s B_s, O_s C_s$  können stets als schiefe Parallelprojektion eines rechtwinklig-gleichschenkligen Achsenkreuzes  $OABC$  oder  $\mathfrak{A}$  angesehen werden, dessen Schenkellänge dadurch bestimmt ist.

Man kann dem Satz eine noch allgemeinere Fassung geben, indem man die Annahme, daß die Strecken  $OA, OB, OC$  gleich lang und zueinander rechtwinklig sein sollen, fallen läßt:

Durch passende Wahl von Projektionsrichtung und Bildebene kann man es stets erreichen, daß das Bild  $O_s A_s B_s C_s$  eines gegebenen Tetraeders  $OABC$  einem gegebenen Viereck  $O_0 A_0 B_0 C_0$  ähnlich wird.

Einen Beweis für den Pohlkeschen Satz, sowie die konstruktive Ermittlung der gegenseitigen Lage von Achsenkreuz und seinem Bild, gibt uns die in 214 Bd. III behandelte Aufgabe. Dasselbst wird allerdings von gewissen Eigenschaften der Flächen 2. Grades und ihrer Umrisse Gebrauch gemacht. Es mag deshalb hier die Bestimmung der Lage des Achsenkreuzes, wenn sein Bild gegeben ist, auf einem anderen Wege durchgeführt werden, der im wesentlichen auf einer Anwendung der in 108 Bd. I behandelten Aufgabe beruht. Dort galt es die Lage eines Dreiecks  $ABC$  zu bestimmen, dessen Aufriß  $A''B''C''$  bekannt war und das einem gegebenen Dreieck ähnlich sein sollte.

8. Ist die Lage des Achsenkreuzes  $\mathfrak{A}$  gegen die Bildebene sowie die Richtung der Projektionsstrahlen bekannt, so ist damit auch sein Bild  $\mathfrak{A}_s$  bestimmt. Schneidet man nun die Projektionsstrahlen mit einer zu ihnen senkrechten Ebene  $N$ , so erhält man eine Figur  $\mathfrak{A}_n$  oder  $O_n A_n B_n C_n$ , die sowohl als Orthogonalprojektion von  $\mathfrak{A}$  als auch von  $\mathfrak{A}_s$  erscheint. Hierbei sind die Figuren  $\mathfrak{A}_n$  und  $\mathfrak{A}_s$  affin, die Spur  $n_1$  der Ebene  $N$  in der Bildebene ist die Affinitätsachse. Zieht man durch  $O_s$  die Geraden  $O_s X_s$  und  $O_s Y_s$  parallel und senkrecht zu  $n_1$  ( $X_s, Y_s$  auf  $A_s B_s$ ), sowie durch  $O_n$  die Geraden  $O_n X_n$  und  $O_n Y_n$ ,



parallel und senkrecht zu  $n_1$  ( $X_s Y_s$  auf  $A_s B_s$ ), so sind  $O_s X_s Y_s$  und  $O_s X_s I_s$  entsprechende rechtwinklige Dreiecke in den affinen Figuren  $\mathfrak{R}_s$  und  $\mathfrak{R}_s''$ ; dabei gilt die Beziehung  $O_s X_s = O_s X_s$ .

Um die Lage der projizierenden Strahlen gegen das Achsenkreuz  $\mathfrak{R}$  zu finden, denken wir uns die projizierenden Ebenen durch  $OC$  und  $AB$  gelegt; sie schneiden sich in einem projizierenden Strahl  $s = JK$  ( $J = s \times OC$ ,  $K = s \times AB$ ). Die Punkte  $J$  und  $K$  aber ergeben sich aus den Relationen:  $JO:CO = J_s O_s:C_s O_s$  und  $KA:BA = K_s A_s:B_s A_s$ , wobei  $J_s = K_s = O_s C_s \times A_s B_s$  ist. Hiernach bestimmt sich dann auch die orthogonale Projektion  $\mathfrak{R}_s'$  von  $\mathfrak{R}$ , und gemäß 108 Bd. I läßt sich nun die Lage von  $\mathfrak{R}_s'$  — und damit auch von  $\mathfrak{R}$  — gegenüber der von  $\mathfrak{R}_s$  angeben. Damit wäre alsdann die Aufgabe gelöst: Das Achsenkreuz  $\mathfrak{R}$  in eine solche Lage gegen die Bildebene zu bringen, daß seine schiefe Parallelprojektion die vorgegebene Gestalt  $\mathfrak{R}_s$  annimmt; zugleich wäre der Satz von Pohlke bewiesen.

Der hier geschilderten Konstruktion steht zunächst nur das eine entgegen, daß man nicht die wahre Länge der Strecken  $OA = OB = OC$  des Achsenkreuzes  $\mathfrak{R}$  kennt. Man gehe daher zunächst von einem Achsenkreuz  $\mathfrak{R}_1$  aus, dessen Kantenlänge  $OA_1 = OB_1 = OC_1$  man irgendwie wählt. Hierauf bestimme man  $J_1$  und  $K_1$  gemäß  $J_1 O:C_1 O = J_s O_s:C_s O_s$  und  $K_1 A_1:B_1 A_1 = K_s A_s:B_s A_s$ ; dann ist  $J_1 K_1 = s$  die gesuchte Projektionsrichtung. Sie liefert die Orthogonalprojektion  $\mathfrak{R}_1''$  von  $\mathfrak{R}_1$  auf eine Ebene  $N$ , die man senkrecht zu  $s$  gewählt hat.

Nun ist  $\mathfrak{R}_1''$  ähnlich zu  $\mathfrak{R}_s''$ ; da aber  $\mathfrak{R}_s'$  und  $\mathfrak{R}_s$  affin sind, so sind auch  $\mathfrak{R}_1''$  und  $\mathfrak{R}_s$  affin in weiterem Sinn. Wie dem rechtwinkligen Dreieck  $O_s X_s Y_s$  der Figur  $\mathfrak{R}_s$  das rechtwinklige Dreieck  $O_s X_s I_s$  der affinen Figur  $\mathfrak{R}_s'$  entspricht, so entspricht ihm das rechtwinklige Dreieck  $O'' X_1'' I_1''$  der affinen Figur  $\mathfrak{R}_1''$ , wenn  $O' A_1'' B_1'' C_1'' X_1'' I_1''$  und  $O_s A_s B_s C_s X_s Y_s$  ähnliche Figuren sind. Die letztere dieser beiden Figuren erhält man aus der ersteren, indem man sie ähnlich vergrößert oder verkleinert im Verhältnis  $O'' X_1'':O_s X_s$ . Jetzt findet man die Lage der Ebene  $N$  gegen die Bildebene, indem man ihre Spur  $n_1$  parallel zu  $O_s X_s$  zieht und ihren Neigungswinkel  $\varepsilon$  derart wählt, daß  $O_s Y_s \cdot \cos \varepsilon = O_s I_s$  wird. Die orthogonale Projektion von  $\mathfrak{R}_s$  auf  $N$  ist nun in der Tat kongruent mit  $\mathfrak{R}_s'$ ; sie erscheint zugleich als orthogonale Projektion von  $\mathfrak{R}$  auf  $N$ , wodurch sich die räumliche Lage von  $\mathfrak{R}$  ergibt.

9. Die Konstruktion führen wir in folgender Weise aus.  $O A_1 B_1$  sei ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck parallel zur Zeichenebene mit der Orthogonalprojektion  $O' A_1^0 B_1^0$  (Fig. 1a). Auf  $A_1 B_1$  bestimmen wir den Punkt  $K_1$  gemäß der Proportion  $A_1^0 K_1':A_1^0 B_1^0$



ist nun zur Zeichenebene, die als Grundrißebene gedacht ist, parallel; eine zu  $s$  senkrechte Ebene nehmen wir als Aufrißebene ( $x \perp s$ ) und zeichnen den Aufriß  $O'' A_1'' B_1'' C_1'' J_1'' = K_1''$  ( $O'' K_1'' C_1'' \parallel x$ , die Abstände der Punkte  $A_1''$  und  $B_1''$  von  $O'' K_1''$  sind gleich den Abständen der Punkte  $A_1^0, B_1^0$  von  $O' K_1'$ ).

Um weiter entsprechende rechte Winkel in den affinen Figuren  $\mathfrak{R}_s$  und  $\mathfrak{R}_1''$  zu erhalten, verfahren wir nach 12 Bd. I so. Wir zeichnen ein zu  $O'' A_1'' B_1''$  ähnliches Dreieck  $O_2 A_s B_s$ , dessen Seite  $A_s B_s$  mit der gleichbenannten Seite des Dreiecks  $O_s A_s B_s$  zusammenfällt (Fig. 1b). Der Kreis durch  $O_2$  und  $O_s$ , dessen Mittelpunkt auf  $A_s B_s$  gelegen ist, schneidet aus dieser Geraden zwei Punkte  $X_s$  und  $Y_s$  aus. Die Spur  $n_1$  der Ebene  $N$  ist nun parallel zu  $O_s X_s$  zu ziehen und ihr Neigungswinkel  $\varepsilon$  gegen die Bildebene ist so zu bestimmen, daß die Orthogonalprojektion des Dreiecks  $O_s X_s Y_s$  auf die Ebene  $N$  ein dem Dreieck  $O_2 X_2 Y_2$  ähnliches Dreieck, also ein zu  $O_2 X_2 Y_2$  kongruentes Dreieck liefert ( $O_2 X_2 = O_s X_s$ ,  $X_2 Y_2 A_2 B_2 \parallel X_s Y_s A_s B_s$ ,  $O_2 Y_2 = O_s Y_s \cdot \cos \varepsilon$ ).

Zur Fixierung der Lage des Achsenkreuzes  $\mathfrak{R}$  gegen sein Bild  $\mathfrak{R}_s$  sind in Figur 1b Grund- und Aufriß von  $\mathfrak{R}$  angegeben, wobei die Bildebene zugleich als Grundrißebene benutzt und die Aufrißebene senkrecht zu  $n_1$  gewählt ist ( $y \perp n_1$ ,  $\angle n_2 y = \varepsilon$ ,  $\cos \varepsilon = O_2 Y_2 : O_s Y_s$ ). Da die Punkte  $O A B C$  auf den von  $O_s A_s B_s C_s$  auf  $N$  gefällten Loten liegen (die Grundrisse dieser Lote sind senkrecht zu  $n_1$ , ihre Aufrisse senkrecht zu  $n_2$ ), braucht man nur noch die Abstände der Punkte  $O'' A'' B'' C''$  von  $n_2$  zu bestimmen. Diese würden unmittelbar mit den Abständen der Punkte  $O' A'_1 B'_1 C'_1$  von  $x$  in Figur 1a übereinstimmen, wenn das Achsenkreuz  $\mathfrak{R}_1$ , das den Ausgangspunkt bildete, die gleiche Größe wie  $\mathfrak{R}$  hätte. Das ist jedoch nicht der Fall; vielmehr muß  $\mathfrak{R}$  noch ähnlich verkleinert werden. Das ist in Figur 1a geschehen, indem  $O'' A_s'' = O_2 A_2$ ,  $O'' B_s'' = O_2 B_2$  gemacht wurde; man erhält dadurch die Projektionen  $O'' A_s'' B_s'' C_s''$  und  $O' A'_3 B'_3 C'_3$ . Die Abstände der letzteren Punkte von  $x$  sind nun gleich den Abständen der Punkte  $O'' A'' B'' C''$  von  $n_2$ , wodurch sich dann auch  $O' A' B' C'$  ergibt.

Zum Schluß sei noch folgendes bemerkt. Die Punkte  $X_s$  und  $Y_s$  werden aus  $A_s B_s$  durch einen Kreis ausgeschnitten; es ist jedoch nicht gleichgültig, welchen der beiden Punkte wir mit  $X_s$  bezeichnen, da wir  $n_1$  zu  $O_s X_s$  parallel gezogen haben. Es ist vielmehr darauf zu achten, daß in dem rechtwinkligen Dreieck  $O_2 X_2 Y_2$ , dessen Hypotenuse zu  $A_s B_s$  parallel ist, die Kathete  $O_2 X_2$  kleiner als die Strecke  $O_s Y_s$  sein muß, da erstere gleich der Orthogonalprojektion  $O_s Y_s$  der

letzteren ist. Diese Bedingung entscheidet aber darüber, welchem der beiden Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden  $A, B$ , man die Bezeichnung  $X_s$  beizulegen hat. Außerdem ist klar, daß es zwei zur Zeichenebene symmetrische Lösungen gibt, je nachdem in Figur 1b die Aufrißebene um  $y$  aufwärts oder abwärts um  $90^\circ$  gedreht wird.

### Das Verfahren der schiefen Projektion, wenn Bild- und Aufrißebene zusammenfallen.

10. Um eine räumliche Figur in schiefer Projektion darzustellen und zwar so, daß durch das Bild umgekehrt die Originalfigur bestimmt wird, denken wir uns das Original mit der Grundrißebene  $\Pi_1$  verbunden und auf diese durch senkrechte Projektion bezogen. Das Ganze, die Raumfigur mit ihrem Grundriß, wird der schiefen Projektion unterworfen. Die Bildebene lassen wir mit der Aufrißebene  $\Pi_2$  zusammenfallen. Den Grundriß denken wir uns durch seine Umlegung in die Bildebene  $\Pi_2$  gegeben. Die Geraden, welche auf den Ebenen  $\Pi_1, \Pi_2$  und  $\Pi_3$  bzw. senkrecht stehen, bezeichnen wir, wie früher, als erste, zweite und dritte projizierende Strahlen; zum Unterschiede von ihnen nennen wir die schief projizierenden Strahlen kurz Sehstrahlen.

Wählen wir in der vertikalen Bildebene  $\Pi_2$  den Ursprung  $O$ , ziehen die positive  $x$ -Achse horizontal nach rechts, die positive  $z$ -Achse vertikal nach oben und die positive  $y$ -Achse nach vorn, so ist die Lage des Koordinatensystems gegen die Bildebene bestimmt. Die Richtung der Sehstrahlen legen wir fest, indem wir von einem gegebenen Punkte der Grundrißebene  $\Pi_1$  den Bildpunkt angeben. Ersteren wählen wir etwa auf der  $y$ -Achse und markieren ihn (umgelegt um  $x$ ) als  $O_1$ ; letzteren nehmen wir als  $O_2$  derart an, daß das Bild  $y_s = O O_2$  der  $y$ -Achse gegen  $x$  und  $z$  geneigt ist (Fig. 2).  $O_1$  und  $O_2$  sind die Spurpunkte eines Sehstrahles  $o$  in  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$ . Es sei noch  $O_2'$  der Grundriß des Punktes  $O_2$  und  $O_1^0$  die Umlegung von  $O_1$  um  $y_s$ ; dann ist  $o' = O_1 O_2'$  der Grundriß des Sehstrahles  $o$ , ferner  $o'' = O O_2$  sein Aufriß,  $o_s' = O_2 O_2'$  das Bild des Grundrisses,  $o^0 = O_2 O_1^0$  die Umlegung um  $o''$  und folglich

$$\omega = \angle O_1^0 O_2 O$$

die Neigung der Sehstrahlen gegen die Bildebene. Die Größe

$$\cotg \omega = \frac{O O_2}{O O_1}$$

gibt für jede Normale zur Bildebene ( $y$ -Koordinate) das Verhältnis



und  $P'P_x$  zu  $y$  parallel sind. Demnach wird das Bild  $P_sP_s'$  zu  $PP'$  parallel und gleich lang, während die Bilder  $P_sP''$  und  $P_s'P_x$  zu  $y_s$  parallel werden und zu  $PP'' = P'P_x$  in dem gegebenen Verkürzungsverhältnis stehen. Sind  $P'$ ,  $P''$  und damit  $P_x$  gegeben, so ergibt sich  $P_s'$  als Schnittpunkt zweier durch  $P'$  bzw.  $P_x$  zu  $O_1O_2$  bzw.  $OO_2 = y_s$  gezogenen Parallelen, worauf man  $P_s$  senkrecht über  $P_s'$  im Abstände  $P''P_x$  (oder als vierte Ecke des Parallelogramms mit den Seiten  $P''P_x$  und  $P_xP_s'$ ) findet. Sind  $P_s'$ ,  $P_s$  bekannt, so ziehe man durch beide die Parallelen zu  $y_s$  und durch  $P_x$  die Vertikale, auf der dann  $P''$  und  $P'$  liegen ( $P_s'P' \parallel O_2O_1$ ) (Fig. 2).

12. Eine Gerade  $g$  wird durch ihr Bild  $g_s$  und das Bild  $g_s'$  ihres Grundrisses  $g'$  bestimmt; die Geraden  $g_s$  und  $g_s'$  können willkürlich angenommen werden (bis auf eine Ausnahme, siehe unten). Die Geraden  $g$  und  $g'$  liegen in einer Vertikalebene, sonach sind  $g_s$  und  $g_s'$  die Bilder zweier in einer Vertikalebene liegenden Geraden. Der Schnittpunkt  $G_{1s} = g_s \times g_s'$  ist das Bild des

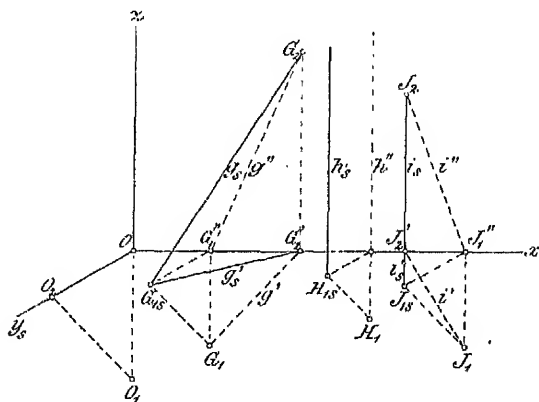


Fig. 3.

ersten Spurpunktes  $G_1$ ; der zweite Spurpunkt  $G_2$  ist sein eigenes Bild und liegt auf  $g_s$ , er befindet sich mit  $G_2' = g_s' \times x$  auf einer Senkrechten zur  $x$ -Achse. Die Senkrechte ist die Aufrißspur der Vertikalebene durch  $g$  und  $g'$ , während  $g_s'$  das Bild ihrer Grundrißspur darstellt (Fig. 3). Aus  $G_{1s}$  leitet man  $G_1'$  auf  $x$  und  $G_1$  ab ( $G_{1s}G_1'' \parallel O_2O$ ,  $G_1''G_1 \perp x$ ,  $G_{1s}G_2 \parallel O_2O_1$ ) und erhält hieraus  $g' = G_1G_2'$  und  $g'' = G_1''G_2$ . Umgekehrt kann man leicht aus dem Grundriß  $g'$  und Aufriß  $g''$  einer Geraden  $g$  oder aus den beiden Projektionen zweier ihrer Punkte die Bildgeraden  $g_s$  und  $g_s'$  finden, was keiner Erläuterung bedarf. — Das Bild eines Sehstrahles  $o$  ist sein Spurpunkt  $O_2$  in

der Bildebene, mit ihm fällt  $O_{1s}$  zusammen; das Bild  $o_s'$  seiner ersten Projektion ist senkrecht zur  $x$ -Achse (Fig. 2). Das Bild einer zu  $\Pi_1$  senkrechten Geraden  $h$  ist rechtwinklig zur  $x$ -Achse; ihr Grundriß und sein Bild reduzieren sich auf die Punkte  $H_1$  bzw.  $H_{1s}$ . Sieht man von diesen beiden Spezialfällen ab und nimmt man eine der Geraden  $i_s$  oder  $i_s'$  zur  $x$ -Achse rechtwinklig an, so muß die andere in demselben Punkte auf der  $x$ -Achse senkrecht stehen; denn die Sehstralebene durch die eine Gerade steht dann senkrecht auf  $\Pi_1$  und enthält folglich auch die andere. Demnach folgt hieraus für die Gerade  $i$  nur, daß sie in einer bestimmten zur Sehstralebene durch die  $z$ -Achse parallelen Ebene liegt; um  $i$  vollständig zu bestimmen, bedarf es weiterer Angaben (Spurpunkte).

13. Eine Ebene  $E$  wird durch ihre Spurlinie  $e_2$  in der Bildebene und das Bild  $e_{1s}$  ihrer ersten Spurlinie  $e_1$  dar-

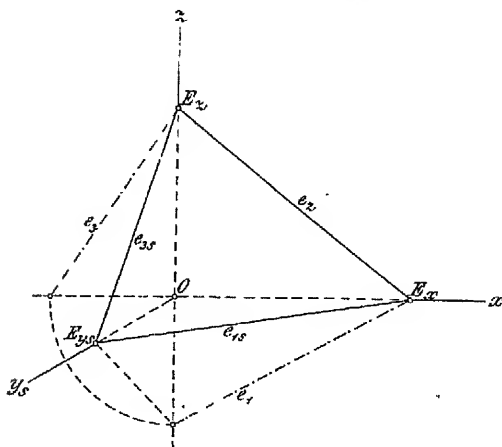


Fig. 4.

gestellt, die sich im

Achsenschnitt-  
punkte  $E_x = E \times x$   
treffen (Fig. 4). Die  
Sehstralebene durch  $e_{1s}$   
schneidet  $\Pi_1$  in  $e_1$  und  
hieraus ergibt sich  $E$  als  
Verbindungsebene  $e_1 e_2$ .  
— Enthält  $E$  die Rich-  
tung der Sehstrahlen, so  
fallen  $e_{1s}$  und  $e_2$  in  
dieselbe gerade Linie.  
Steht  $E$  senkrecht auf  
 $\Pi_1$ , so ist  $e_2 \perp x$ ; ist  $E$   
senkrecht zu  $\Pi_2$ , so  
liegt  $e_{1s} \parallel y_s$ . Enthält  $E$

die  $x$ -Achse, so fallen  $e_{1s}$  und  $e_2$  beide mit dieser zusammen und zur Bestimmung von  $E$  ist noch die Angabe eines auf ihr und außerhalb  $x$  gelegenen Punktes erforderlich.

14. Die in 46—65 Bd. I für orthogonale Projektion entwickelten Sätze über die vereinigte Lage von Punkten, Geraden und Ebenen, über ihre Verbindungs- und Schnittelemente und den Parallelismus können ohne Schwierigkeit auf den Fall der schiefen Projektion übertragen werden. Auch die Lösung der dort behandelten Aufgaben vollzieht man in unserem jetzigen Verfahren in analoger Weise, wie an einigen Beispielen gezeigt werden mag.

Man hat dabei namentlich den folgenden Satz zu beachten:

Das Bild  $\mathfrak{F}_s$  einer ebenen Figur  $\mathfrak{F}$  ist zu dem Bilde  $\mathfrak{F}'_s$  ihres Grundrisses  $\mathfrak{F}'$  affin und affingeleget. Die Affinitätsachse ist das Bild  $e_{1s}$  der ersten Spur  $e_1$  der Ebene von  $\mathfrak{F}$ ; die Affinitätsstrahlen sind rechtwinklig zur  $x$ -Achse. In der Tat sind  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{F}'$  durch senkrechte Strahlen aufeinander und beide durch die Sehstrahlen auf  $\mathfrak{F}_s$  und  $\mathfrak{F}'_s$  bzw. affin bezogen. Parallelen Geraden in der Originalfigur  $\mathfrak{F}$  entsprechen also Parallele in  $\mathfrak{F}'$ , die jene in Punkten von  $e_1$  schneiden; die ihnen in  $\mathfrak{F}_s$  bzw.  $\mathfrak{F}'_s$  entsprechenden Geraden sind wiederum Parallele und treffen

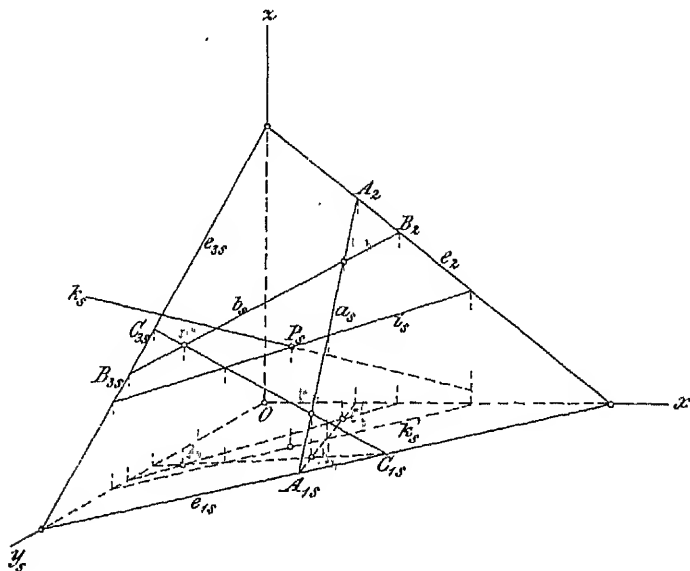


Fig. 5.

sich in Punkten der Linie  $e_{1s}$ . — Insbesondere ist jede Figur in der Grundrißebene zu ihrem Bilde affin, wobei  $x$  die Affinitätsachse und  $O_1O_2$  die Affinitätsrichtung ist.

Um die Spurlinien einer durch drei Punkte  $A, B, C$  gegebenen Ebene  $E$  darzustellen, verbinde man die Bilder  $A_s, B_s, C_s$  dieser Punkte und ebenso die Bilder  $A'_s, B'_s, C'_s$  ihrer Grundrisse paarweise durch gerade Linien  $a_s, b_s, c_s, a'_s, b'_s, c'_s$  (Fig. 5).  $A_{1s} = a_s \times a'_s$  ist das Bild des ersten Spurpunktes der Geraden  $a = BC$ , ihr zweiter Spurpunkt  $A_2$  liegt auf  $a_s$  senkrecht über  $a'_s \times x$ , usf. Die Spurlinie  $e_2$  verbindet die Punkte  $A_2, B_2, C_2$  die Linie  $e_{1s}$  die Punkte  $A_{1s}, B_{1s}, C_{1s}$ . In der Figur ist das Bild  $e_{3s}$  der dritten Spur mitgezeichnet (vgl. 57 Bd. I).



Den Schnittpunkt  $P$  einer Geraden  $k$  mit der Ebene  $E = ABC$  bestimmt man in folgender Weise (vgl. 61 Bd. I). Schneidet die Vertikalebene  $kk'$  die Ebene  $E$  in der Geraden  $i$ , so fällt  $i_s'$  mit  $k_s'$  zusammen. Senkrecht über den Schnittpunkten von  $k_s'$  mit den Seiten des Dreiecks  $A_s'B_s'C_s'$  findet man daher auf den homologen Seiten des Dreiecks  $A_sB_sC_s$  Punkte der Geraden  $i_s$ , welche  $k_s$  in  $P_s$  trifft.  $P_s$  ist das Bild des gesuchten Punktes  $P = k \times E$ ; das Bild  $P_s'$  seines Grundrisses liegt senkrecht darunter auf  $k_s'$ .

Diese Beispiele mögen genügen.

15. Um in schiefer Projektion diejenigen Grundaufgaben zu lösen, die sich auf die rechtwinklige Stellung von Geraden

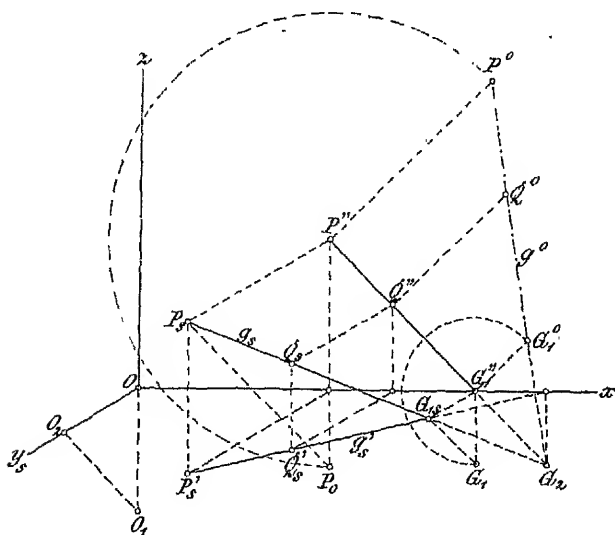


Fig. 6.

und Ebenen, auf die Bestimmung von Abständen und Winkeln und der wahren Gestalt ebener Figuren beziehen, ist es nötig, auf das Verfahren der Umlegung in die Bildebene und der Drehung um eine Tafelparallele einzugehen (vgl. 71—91 Bd. I).

Um die wahre Länge einer durch ihre Projektionen  $P_sQ_s$  und  $P_s'Q_s'$  gegebenen Strecke  $PQ$  zu finden, legt man sie um ihren Aufriß  $P''Q''$  in die Bildebene  $\Pi_2$  um (Fig. 6). Zu diesem Zwecke leitet man zuerst aus den gegebenen Projektionen den Aufriß  $P''Q''$  der Strecke und die wahren Längen der Tafelabstände  $P'P$  und  $Q'Q$  nach 11 ab und trägt sodann die letzteren

senkrecht zu  $P''Q''$  als  $P''P^0$  und  $Q''Q^0$  auf  $(P''P^0:P''P_s = OO_1:OO_2)$ ;  $P^0Q^0$  gibt die wahre Länge der Strecke  $PQ$  an. Die Umlegung der Geraden  $g$ , auf der  $PQ$  liegt, in die Bildebene durch Drehung um  $g''$  kann auch mit Benutzung der Spurpunkte  $G_1$  und  $G_2$  erfolgen, woraus sich der Neigungswinkel  $\gamma_2$  der Geraden gegen die Bildebene  $\Pi_2$  als  $\angle G_1^0G_2G_1''$  ergibt.

Der Neigungswinkel  $\gamma_1$  gegen die Grundrißebene  $\Pi_1$  wird wie früher (77 Bd. I) bestimmt, nachdem man zuvor  $g'$  gezeichnet hat.

Andererseits kann man die Länge der Strecke  $PQ$  durch ihre Paralleldrehung zur Bildebene bestimmen. Als Drehachse benutzt man entweder die durch einen Endpunkt  $Q$  gezogene Parallele  $QN$  zum Aufriß  $P''Q''$  oder die erste vertikal projizierende Gerade  $QQ'$  eines Endpunktes (Fig. 7). Bei dem ersten Verfahren bildet man das rechtwinklige Dreieck  $PQN$ , dessen Katheten  $PN$  und  $QN$  senkrecht bzw. parallel zu  $\Pi_2$  liegen, und dreht es um  $QN$  in eine zur Bildebene parallele Lage  $P^0Q^0N$ ; dann stellt  $P^0Q^0$  die gesuchte

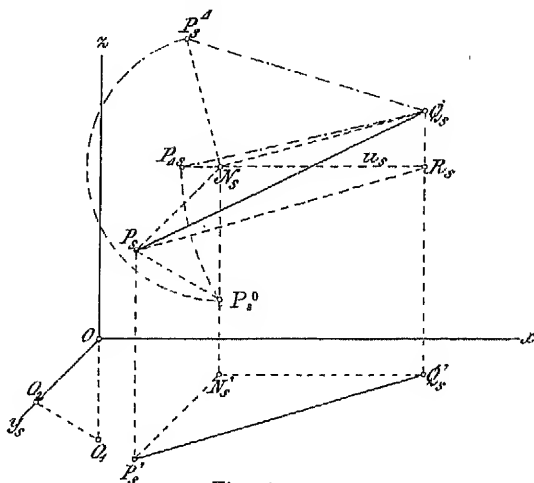


Fig. 7.

Länge dar. Die Konstruktion ist dem Vorigen unmittelbar zu entnehmen ( $P_sN_s \parallel P'_sN'_s \parallel y_s$ ,  $Q'_sN'_s \parallel x$ ). Bei dem zweiten Verfahren bezeichnen wir durch  $R$  den Fußpunkt des aus  $P$  auf die Linie  $QQ'$  gefällten Lotes ( $P_sR_s \perp P'_sQ'_s$ ) und mit  $u$  die Parallele zur  $x$ -Achse durch  $R$ . Die wahre Länge von  $PR$  ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck  $PNR$  ( $\triangle PNR \cong \triangle P_s^0N_sR_s$ ,  $P_sP_s^0 \parallel O_2O_1$ ). Macht man jetzt auf  $u_s$  die Strecke  $R_sP_{s^0} = R_sP_s^0$ , so stellt  $Q_sP_{s^0}$  die Strecke  $PQ$  abermals in einer zur Bildebene parallelen Lage und folglich in wahrer Länge dar. Diese zweite Lage geht durch Drehung um die Vertikale  $QQ'$  hervor.

16. Die Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur  $\mathfrak{F}$  erfolgt durch Umlegung derselben in die Bildebene um die bezügliche Spurlinie  $e_2$  ihrer Ebene  $E$  (Fig. 8). Es genügt, einen

einigen Punkt  $F$  unserer Ebene der Umlegung zu unterwerfen, den wir der Einfachheit halber auf ihrer ersten Spur  $e_1$  gelegen und durch sein Bild  $F_s$  auf  $e_{1s}$  gegeben annehmen wollen. Aus  $F_s$  findet man in bereits geläufiger Weise den Aufriß  $F''$  auf  $x$ , den um  $x$  in die Bildebene niedergelegten Punkt  $F$  selbst und damit die Spur  $e_1$ . Zieht man  $F''G$  senkrecht zu  $e_2$ , so steht die Ebene  $FF''G$  auf  $e_2$  senkrecht und schneidet aus  $E$  die Falllinie  $FG$ , deren Bild  $F_sG$  ist, aus. Die um  $e_2$  umgelegte Falllinie  $GF^0$  ist normal zu  $e_2$ , ihre Länge ergibt sich aus dem rechtwinkligen

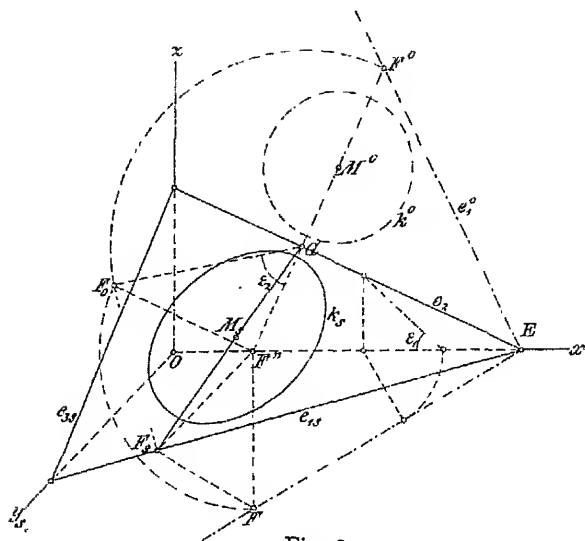


Fig. 8.

Dreieck  $F_0F''G$ ; worauf  $e_1^0 = F_0E$  gezogen werden kann. Einfacher gelangt man zu  $e_1^0$ , indem man  $F^0$  aus den Beziehungen:  $F''F^0 \perp e_2$  und  $F^0E = F'E$  konstruiert. Das Bild  $\mathfrak{F}_s$  einer in  $E$  gelegenen Figur  $\mathfrak{F}$  ist zu ihrer Umlegung  $\mathfrak{F}^0$  um  $e_2$  affin und affin gelegen. Die Affinität ist bestimmt durch ihre Achse  $e_2$  und die sich entsprechenden Punkte  $F_s$  und  $F^0$ , deren Verbindungslinie die Richtung der Affinitätsstrahlen angibt (vgl. 80 Bd. I). Mit Benutzung dieser Affinität ist in der Figur das Bild  $k_s$  eines in  $E$  gelegenen Kreises  $k$  aus der Umlegung  $k^0$  konstruiert.

Zugleich hat unsere Konstruktion den Neigungswinkel  $\varepsilon_2$  der Ebene  $E$  gegen die Bildebene als  $\angle F_0GF''$  ergeben. Ihr Neigungswinkel  $\varepsilon_1$  gegen die Grundrißebene wird nach Angabe von  $e_1$  wie früher gefunden (vgl. 77 Bd. I).

17. Zum gleichen Zwecke wie oben wendet man auch die Paralleldrehung einer Ebene  $E$  zur Bildebene  $\Pi_2$  an, und zwar namentlich dann, wenn die Spurlinien nicht bekannt sind, sondern die Ebene durch drei ihrer Punkte  $A, B, C$  oder zwei ihrer Geraden gegeben ist. Das Verfahren ist dem in 85 Bd. I angegebenen völlig analog. Eine zur Bildebene  $\Pi_2$  parallele Hilfsebene  $\Pi_3$  schneide die Ebene des Dreiecks  $ABC$  in der Geraden  $a = D E(a_s' \parallel x)$ , die wir als Drehachse benutzen, um  $ABC$  als  $A^d B^d C^d$  in  $\Pi_3$  umzu-  
 legen, worauf das Bild die wahre Gestalt des Dreiecks zeigt (Fig. 9). Zuerst werde  $A$  umgelegt. Man fälle von  $A$  das Lot  $AF$  auf  $\Pi_3$  ( $A_s F_s \parallel A_s' F_s' \parallel y_s$ ,  $F_s'$  auf  $a_s'$ ) und von  $F$  das Lot  $FG$  auf  $a$  ( $F_s G_s \perp a_s$ ), dann ist  $AG$  das von  $A$  auf  $a$  gefällte Lot. Nun ist  $AG$  die Hypotenuse in dem  $\triangle AFG$  oder in dem  $\triangle A_s^0 F_s G_s$  ( $A_s^0 F_s = A_s' F_s'$ ); trägt man also  $A_s^d G_s = A_s^0 G_s$  senkrecht zu  $a_s$  auf, so ist  $A_s^d$  das Bild des umgelegten Punktes  $A$ . Ist  $A_s^d$  gefunden, so erhält man das Dreieck  $A_s^d B_s^d C_s^d$  als das zu  $A_s B_s C_s$  in bezug auf die Achse  $a_s$  affin gelegene.

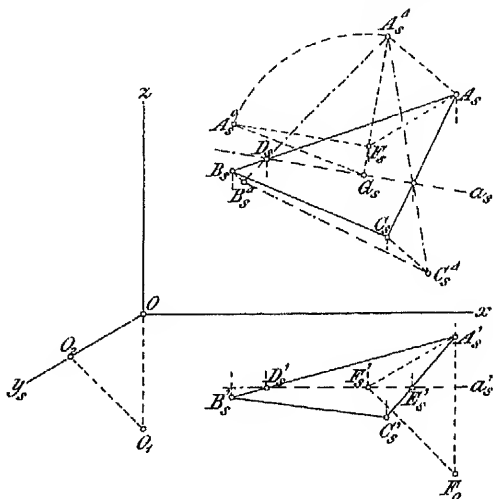


Fig. 9.

18. Um aus einem gegebenen Punkte  $P$  das Lot auf eine Ebene  $E$  zu fällen, legt man die zweite projizierende Ebene dieses Lotes  $l$  um  $l''$  in die Bildebene  $\Pi_2$  um ( $l'' \perp e_2$ ) (Fig. 10). Diese Ebene schneidet  $E$  in der Falllinie  $FG$  ( $\perp e_2$ ) und enthält das gesuchte Lot  $l = PQ$  ( $l \perp FG$ );  $l''$  ist ihre zweite Spur und schneidet  $e_2$  senkrecht in  $F$ ; das Bild ihrer ersten Spur läuft parallel zu  $y_s$  und trifft  $e_{1s}$  in  $G_s$ . Man erhält hieraus die Umlegungen  $G^0$  von  $G$ ,  $P^0$  von  $P$  und  $FG^0$  von  $FG$ . Zieht man durch  $P^0$  die Senkrechte  $l^0$  zu  $FG^0$  und schneidet sie  $FG^0$  und  $l''$  in  $Q^0$  bzw. in  $L_2$ , so ist  $Q^0$  die Umlegung von  $Q$  und  $L_2$  der zweite Spurpunkt von  $l$ ; folglich ist  $l_s = L_2 P_s$  das Bild des gesuchten Lotes und  $l_s' = L_2' P_s'$  das Bild seines Grundrisses ( $Q^0 Q_s \parallel P^0 P_s \parallel G^0 G_s$ ). Das Bild  $Q_s$  des Fußpunktes  $Q$  liegt auf  $FG_s$ , sein Grundrißbild  $Q_s'$  senkrecht darunter

auf  $l'_s$ . Die Strecke  $P^0Q^0$  gibt die wahre Länge von  $PQ$  an. — Unser Verfahren kann auch umgekehrt dazu dienen, in einem ge-

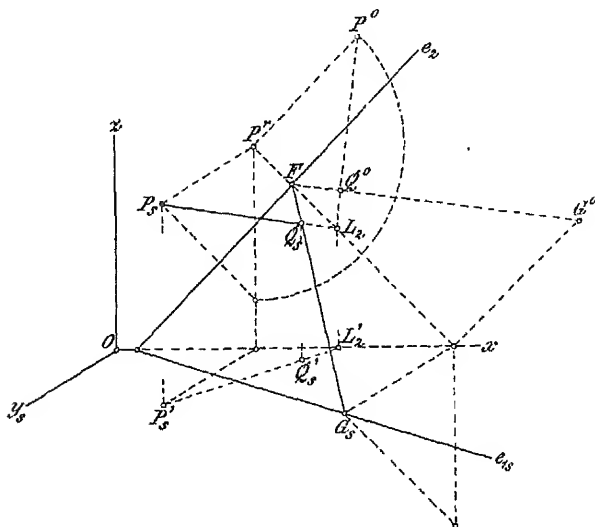


Fig. 10.

gebenen Punkte  $Q$  der Ebene  $E$  eine Normale  $QP$  von vorgeschriebener Länge zu errichten.

19. Von einem Punkte  $P$  und einer Geraden  $g$  seien die beiderlei Bilder  $P_s, P'_s$  und  $g_s, g'_s$  gegeben (Fig. 11). Um den senkrechten Abstand  $PQ$  des Punktes  $P$  von der Geraden  $g$  zu zeichnen und seine wahre Länge zu finden, drehen wir die Ebene  $Pg$  in eine zur Bildebene parallele Lage. Als Drehachse  $a$  ziehen wir die Parallele zu  $\Pi_2$  durch  $P$ , die  $g$  (in  $A$ ) trifft. Ihr Grundrißbild  $a'_s$  ist parallel zu  $x$  durch  $P'_s$  zu ziehen; der senkrecht über  $A'_s = a'_s \times g'_s$  auf  $g$  liegende Punkt  $A_s$  bestimmt mit  $P_s$  das Bild  $a_s$  der Achse  $a$ . In die parallel zur Bildebene durch  $a$  gelegte Ebene  $\Pi_3$  ist die Gerade  $g$  mit dem Lote  $PQ$  umzulegen. Nach der Drehung erscheinen ihre Bilder  $g_s^d$  und  $P_sQ_s^d$  zueinander rechtwinklig, und letzteres gibt die wahre Länge  $PQ$  an. Die Drehung selbst wird ausgeführt, indem man von irgend einem Punkte  $B$  der Geraden  $g$  das Lot  $BC$  auf die Ebene  $\Pi_3$  und von dessen Fußpunkt aus das Lot  $CD$  auf die Achse  $a$  fällt (vgl. 17). Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Katheten  $BC$  und  $CD$  ergibt, von  $D$  aus auf  $DC$  abgetragen, einen Punkt  $B^d$  der umgelegten Geraden  $g^d$ , deren schiefes Bild  $g_s^d$  zu zeichnen ist. Auf diesem erhält man  $Q_s^d$

( $P_s Q_s^A \perp g_s^A$ ) und sodann  $Q_s$  durch die Bemerkung, daß  $Q_s^A Q_s \parallel B_s^A B_s$  sein muß. Demnach können beide Bilder  $P_s Q_s$  und  $P_s' Q_s'$  gezeichnet werden.

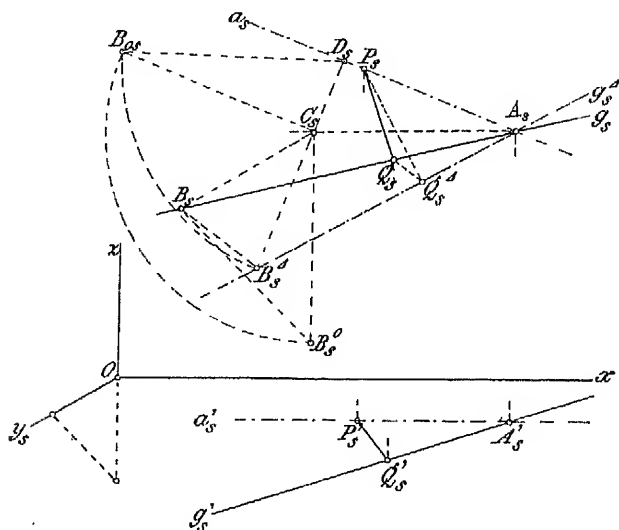


Fig. 11.

20. Den Winkel  $\alpha$  zweier gegebenen (sich schneidenden) Geraden  $g$  und  $h$  bestimmt man am einfachsten, indem man

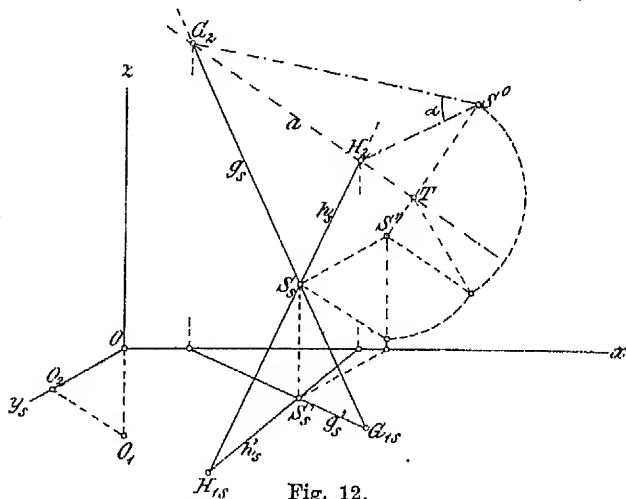


Fig. 12.

in der Bildebene die Verbindungslinie  $a$  der Spurpunkte  $G_2$  und  $H_2$  der Schenkel zieht und den Scheitel  $S$  des Winkels um  $a$  in die

Bildebene niederlegt (Fig. 12). Zu diesem Zwecke hat man das von  $S$  auf  $\Pi_2$  gefällte Lot als  $S_s S''$  darzustellen, aus  $S''$  auf  $a$  das Lot  $S'' T$  zu fallen und auf seine Verlängerung von  $T$  aus die Strecke  $T S^0$  abzutragen, die der Hypotenuse eines rechtwinkligen, mit den Katheten  $SS''$  und  $S'' T$  gebildeten Dreieckes gleich ist. Dann ist  $S^0$  der niedergelegte Scheitel  $S$  und  $\angle G_2 S^0 H_2 = \alpha$  der gesuchte Winkel. Ist  $G_2 H_2$  nicht erreichbar, so schneide man die Geraden  $g$  und  $h$  mit einer zu  $\Pi_2$  parallelen Hilfsebene und lege in diese um.

Die Aufgaben: den Neigungswinkel einer Geraden  $g$  gegen eine Ebene  $E$  oder den Neigungswinkel zweier Ebenen zu bestimmen, können auf die zuletzt behandelte zurückgeführt werden.

21. Der kürzeste Abstand  $PQ$  zweier gegebener Geraden  $g$  und  $h$ . Sind  $g_s, g'_s$  und  $h_s, h'_s$  gegeben, so ziehe man die

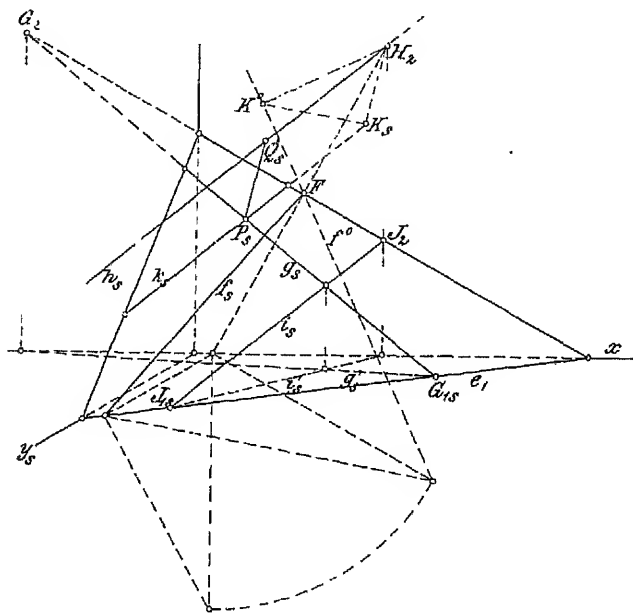


Fig. 13.

zu  $h$  parallele Gerade  $i$ , indem man  $i'_s = h'_s$  und  $i_s \times g_s$  senkrecht über  $h'_s \times g'_s$  annimmt (Fig. 13). Hierauf bestimme man die Spuren  $e_1$  und  $e_2$  der Verbindungsebene  $E = gi$  durch  $e_{1s} = G_{1s} J_{1s}$  und  $e_{2s} = G_{2s} J_{2s}$ . Durch einen Punkt von  $h$ , z. B. durch den Spurpunkt  $H_2$ , lege man eine Ebene  $\Delta$  normal zu  $e_2$ ; sie enthält das von  $H_2$  auf  $E$  gefällte Lot  $H_2 K$ , und dieses hat bereits die Richtung und Länge des ge-

suchten gemeinsamen Lotes  $PQ$  der Geraden  $g$  und  $h$ . Legt man  $\Delta$  um seine zu  $e_2$  senkrechte Bildspur in die Bildebene um, so ergibt sich die Umlegung  $f^0$  der zu  $e_2$  senkrechten Falllinie  $E \times \Delta = f$  und als Normale zu ihr die Umlegung  $H_2 K^0$  von  $H_2 K$  und hieraus  $K_s$  auf  $f_s$  ( $K_s K^0$  läuft parallel zur Verbindungslinie des ersten Spurpunktes von  $f$  mit seiner Umlegung). Zieht man durch  $K_s$  die Parallele  $k_s$  zu  $h_s$ , so stellt sie die senkrechte Projektion von  $h$  auf die Ebene  $E = gi$  dar und schneidet  $g_s$  in  $P_s$ . Durch  $P_s$  ist das Bild  $P_s Q_s$  der gemeinsamen Normalen  $PQ$  von  $g$  und  $h$  parallel zu  $H_2 K_s$  zu ziehen;  $H_2 K^0$  gibt ihre wahre Länge an.

Es mag genügen, die wichtigsten metrischen Aufgaben in schiefer Projektion gelöst zu haben. Man wird daraus erkennen, daß es nur weniger Abänderungen und Zusätze bedarf, um die früher (71—91 Bd. I) für die orthogonale Parallelprojektion entwickelten Methoden auf alle ähnlichen elementaren Probleme auszudehnen, deren Lösung in schiefer Projektion verlangt wird.

22. Die Prinzipien, die zur Konstruktion des wahren und scheinbaren Umrisses eines gegebenen Objektes, sowie seiner

Eigen- und Schlagschatten bei Parallelbeleuchtung führen (und die man in 151—153, 328, 329, 364, 365, 372—374 Bd. I angegeben findet), gelten für jede Parallelprojektion, also auch für unser jetziges Darstellungsverfahren. Nimmt man statt der Parallelbeleuchtung eine Zentralbeleuchtung an, so erfahren die Konstruktionen einige leicht zu übersehende Ab-

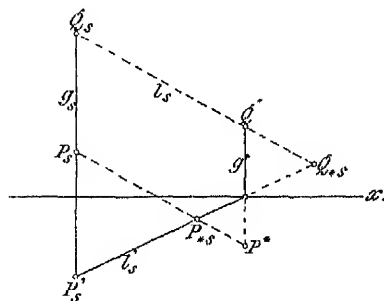


Fig. 14.

änderungen. In jedem Falle hat man zuerst die Lichtgrenze (den wahren Umriss) des Objektes zu bestimmen, hierauf suche man seinen Schlagschatten (scheinbaren Umriss) in der Grundrißebene bzw. in der Bildebene und zuletzt den Schlagschatten des Objektes auf sich selbst. Bei der Ausführung in schiefer Projektion beachte man die folgenden Sätze:

Ist ein Punkt  $P$  durch  $P_s, P'_s$  gegeben und sind  $l_s, l'_s$  die Bilder des ihn enthaltenden Lichtstrahles bzw. seines Grundrisses, so ist  $l'_s$  das Bild des Grundrißschattens der Vertikalen  $g = PP'$ , und ihr Schatten  $g^*$  auf die Bildebene geht durch  $l'_s \times x$  rechtwinklig zur  $x$ -Achse, folglich ist  $Q_{s*} = l_s \times l'_s$  das Bild des Grund-



rißschattens von  $Q$  und  $Q^* = l_s \times g^*$  sein Schatten auf die Bildebene. Sind die Lichtstrahlen parallel, so sind  $l_s$  und  $l'_s$  durch ihre gegebenen Richtungen und die Punkte  $P_s$  bzw.  $P'_s$  bestimmt (Fig. 14). Kommen die Lichtstrahlen aus einem gegebenen Punkte  $L$ , so sind  $l_s$  und  $l'_s$  als Verbindungslinien  $L_s P_s$  bzw.  $L'_s P'_s$  bestimmt.

### Anwendungen der schiefen Projektion.

23. Wir gehen dazu über, das Verfahren der schiefen Projektion auf einige Beispiele anzuwenden und betrachten zuerst ebene flächige Körper mit ihren Schatten.

Ein regelmäßiges Zwölfflach sei durch eine seiner fünfeckigen Seitenflächen, die in der Grundrißebene liegen mag, gegeben. Nach 129 Bd. I bestimmt man leicht seinen vollständigen Grundriß und die ersten Tafelabstände seiner Eckpunkte. Indem man hierauf die Grundrisse der Ecken durch die schiefe Projektion abbildet und von den Bildern aus in vertikaler Richtung die bezüglichen Tafelabstände abträgt, gelangt man zu den Bildern aller 20 Ecken des Dodekaäders und hat nur noch seine Kanten auszuziehen. In Fig. 15 ist die Kante 1,2 der untersten Seitenfläche parallel zur  $x$ -Achse gewählt. Man konstruiert ferner die Schatten der Ecken des Zwölfflachs auf die Grundriß- bzw. Bildebene nach 22 unter der Annahme paralleler Lichtstrahlen ( $l_s, l'_s$ ). Die Lichtgrenze auf dem Zwölfflach wird von einem windschiefen Zehneck mit den Ecken 1, 2, 7, 13, 18, 19, 20, 15, 10, 5 gebildet, dessen Gegenseiten wiederum parallel sind. Zu seinen Ecken gehören die Punkte 1, 19, in denen  $l_s$  das Bild des Körpers, sowie die Punkte 10, 13, in denen  $l'_s$  das Grundrißbild streift. Dieser Schatten wird unter Umständen an der  $x$ -Achse gebrochen sein. Der Aufrißschatten ist zu dem (über die  $x$ -Achse hinweg fortgesetzten) Grundrißschatten affin (Affinitätsachse  $x$ , Affinitätsstrahl  $l_s$ ) und ist hierdurch bestimmt. — Neben dem Dodekaäder stehe auf der Grundrißebene eine gerade Pyramide mit regelmäßiger sechseitiger Basis, die leicht in schiefer Projektion gezeichnet wird. Zieht man durch das Bild  $S_s$  der Spitze und ihr Grundrißbild  $S'_s$  die Geraden  $l_s$  und  $l'_s$ , so schneiden sie sich im Bilde  $S_{ss}$  ihres Grundrißschattens. Die Lichtgrenze auf der Pyramide wird von zwei Kanten  $SB$  und  $SE$  gebildet, deren Basispunkte  $B, E$  mit  $S_{ss}$  verbunden die Grenzen des Schlagschattens liefern. Ihre Bilder überschneiden das von den Grundrißschattenbildern der Dodekaäderkanten gebildete Netz. Geht man von den Schnittpunkten

in Parallelen zu  $l_s$  bis zu den Bildern der Kanten selbst zurück, so erhält man die Bilder der Eckpunkte des Schlagschattens der Pyramide auf das Zwölfflach. Um dabei auch den Schatten der Spitze

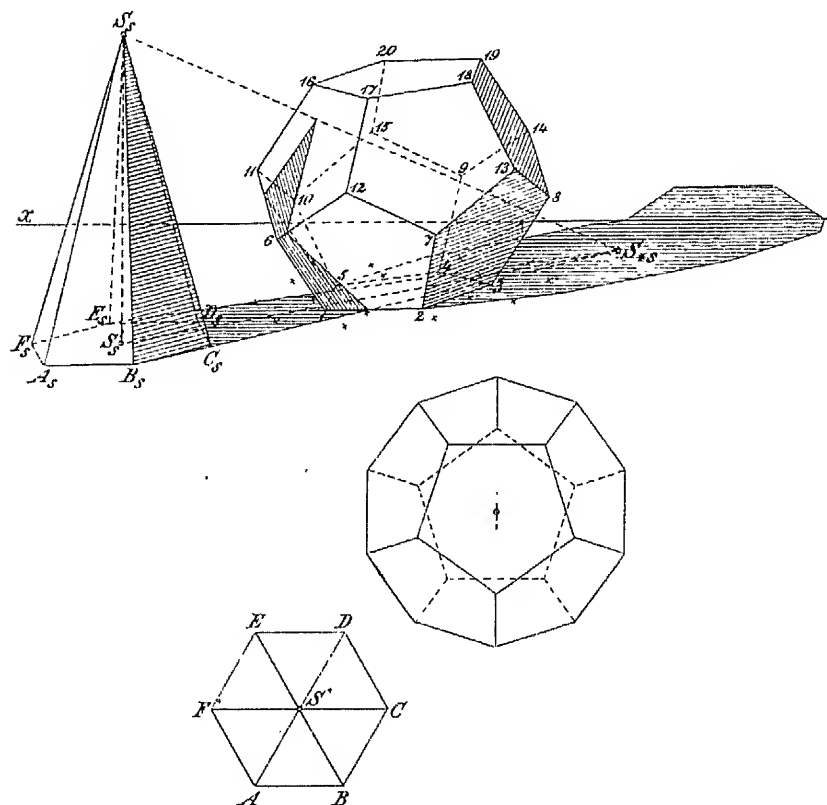


Fig. 15.

zu erhalten, benutzt man die Schatten der über  $S$  hinaus verlängerten Kanten  $BS$  und  $ES$  auf die Kante 16, 17.

24. Darstellung eines geraden Kreiszyinders, dessen Grundkreis in  $\Pi_1$  liegt (Fig. 16). Sei  $A$  der Mittelpunkt des in  $\Pi_1$  gegebenen Grundkreises  $k$  und  $A_s$  sein Bild, so erhält man zuerst  $k_s$ , das Bild des Grundkreises, als eine zu  $k$  affin gelegene Ellipse; die Affinitätsachse ist die  $x$ -Achse;  $A$  und  $A_s$  sind ein Paar affiner Punkte.

Der wahre Umriß des Zylinders für die schiefe Projektion besteht aus zwei Mantellinien, deren Verbindungsebene die Zylinderachse  $a$  enthält und auf dem Grundriß  $o'$  jedes Sehstrahles  $o$  senk-



mit  $M_s$  liefert die Berührungspunkte von  $l_s$  mit dem Zylinderumriß. Der hierzu konjugierte Durchmesser von  $l_s$  fällt auf das Bild der Zylinderachse. Die zu dem ersteren Durchmesser parallelen Tangenten in den Endpunkten des letzteren und die zu  $B_s C_s$  parallelen Tangenten von  $k_s$  treffen sich auf  $e_1$ .

Die Achsen der Schnittellipse  $l$  liegen auf einer Hauptlinie  $g$  und einer Falllinie  $f$  von  $E$ . Die Konstruktion ihrer Spurpunkte  $G_2, F_2, F'_2$  und ihrer Projektionen  $g_s, g'_s, f_s, f'_s$  ist ohne weiteres klar; die Bilder der Achsenendpunkte liegen senkrecht über den entsprechenden Punkten von  $k_s$ . Die wahre Gestalt der Schnittkurve  $l$  erhält man durch ihre Umlegung in die Bildebene um  $e_2$ . Bei der Ausführung fällt man zuerst von  $M$  das Lot  $MM''$  auf  $\Pi_2$  (im Bilde  $M_s M''$ ) und zieht durch  $M''$  die Normale zu  $e_2$ ; ihr Schnittpunkt  $M^0$  mit einem über dem Durchmesser  $F_2 G_2$  geschlagenen Kreis bildet die Umlegung von  $M$  ( $\angle F_2 M^0 G_2 = R$ ). Die weitere Konstruktion folgt aus der Affinität von  $l'_s$  und  $l^0$  (Achse  $e_2$ ).

Die Kurven  $k, k_s, l_s$  und  $l^0$  sind paarweise affin; entsprechende Punkte sind  $A, A_s, M, M^0$ , entsprechende Geraden sind die Parallelen zu  $x$  durch  $A$  und  $A_s$  und die Parallelen zu  $e_2$  durch  $M_s$  und  $M^0$ . Je zwei dieser vier Geraden schneiden sich in einem Punkt der bezüglichen Affinitätsachse, die außerdem den Punkt  $x \times E$  enthält.

Um Eigen- und Schlagschatten des Zylinders für Parallelbeleuchtung zu bestimmen, denke man sich einen (etwa die Zylinderachse treffenden) Lichtstrahl  $l$  durch sein Bild  $l_s$  und das Bild  $l'_s$  seines Grundrisses gegeben. Die Lichtgrenze auf dem Zylinder besteht aus zwei Mantellinien, deren Bilder das Bild  $k_s$  des Grundkreises in den Endpunkten des zu  $l'_s$  konjugierten Durchmessers treffen; die Bilder der Schattengrenzen im Grundriß sind die in diesen Punkten an  $k_s$  gezogenen Tangenten, also parallel zu  $l'_s$ , usw. Die Schattenkonstruktion ist in die Figur nicht eingetragen.

**25.** Darstellung eines geraden Kreiskegels, dessen Grundkreis in  $\Pi_1$  liegt (Fig. 17). Die Abbildung des Grundkreises  $k$  (Zentrum  $A$ ) wird genau wie bei der vorigen Aufgabe erhalten. Der wahre Umriß des Kegels für die schiefe Projektion besteht aus den beiden Mantellinien, deren Tangentialebenen den durch die Spitze  $S$  gezogenen Sehstrahl  $o$  enthalten. Sei  $S_1$  der erste Spurpunkt desselben; die ersten Spurpunkte  $B$  und  $C$  jener Mantellinien findet man dann auf der Polare von  $S_1$  in bezug auf  $k$ . Die Affinität zwischen  $k$  und  $k_s$  liefert die Punkte  $B_s$  und  $C_s$  und damit die Mantellinien des scheinbaren Umrisses  $S_s B_s$  und  $S_s C_s$ , die  $k_s$  berühren. Zieht man die Linien  $S_1 B$  und  $S_1 C$ , die den Kreis  $k$  be-

rühren, so schneiden sie auf der  $x$ -Achse Punkte der scheinbaren Umrißlinien des Kegels aus.

Zur Bestimmung der Eigen- und Schlagschattengrenzen werde durch die Spitze  $S$  des Kegels ein Lichtstrahl  $l$  gezogen und sein Spurpunkt in  $\Pi_1$  durch  $S_*$ , sowie dessen Bild durch  $S_{*s}$  bezeichnet. Die Tangentialebenen durch  $l$  an den Kegel berühren ihn in den

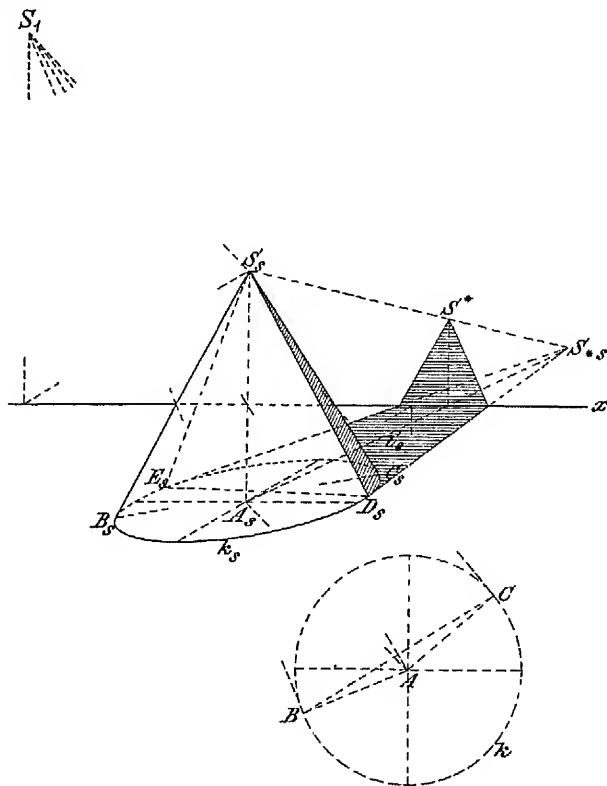


Fig. 17.

Mantellinien  $SD$  und  $SE$  seiner Lichtgrenze; ihre ersten Spurlinien sind daher die aus  $S_*$  an  $k$  gelegten Tangenten. Die Sehne  $DE$  ist somit die Polare von  $S_*$  in bezug auf  $k$ ; ebenso ist  $D_sE_s$  die Polare von  $S_{*s}$  in bezug auf  $k_s$ . Die Tangenten  $S_{*s}D_s$ ,  $S_{*s}E_s$  begrenzen im Bilde den Grundrißschatten. In der Figur erscheint derselbe an der  $x$ -Achse gebrochen und im Aufriß fortgesetzt. Die Vertikale durch den Punkt  $l'_s \times x$  trifft  $l_s$  in dem Schatten  $S^*$  der Spitze  $S$  auf  $\Pi_2$ . Die Konstruktion gilt gleichmäßig für parallele oder zentrale Be-

leuchtung; im Falle der letzteren verbindet der Lichtstrahl  $l$  den leuchtenden Punkt  $L$  mit der Spitze  $S$ .

26. Um in schiefer Projektion die Abbildung einer auf der Grundrißebene  $\Pi_1$  liegenden Kugel mit ihren Eigen- und Schlagschattengrenzen (für parallele Lichtstrahlen) zu erhalten, denkt man sich am einfachsten die Bildebene  $\Pi_2$  durch den Kugelmittelpunkt  $M$  gelegt (Fig. 18). In dieser ziehen wir zwei Durchmesser, den vertikalen  $AB$  und den horizontalen  $CD$ , und bilden den

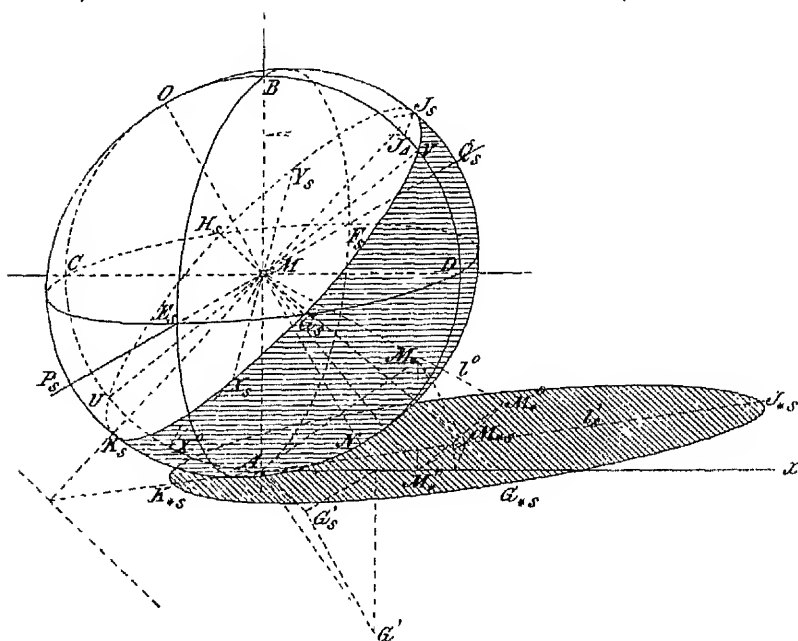


Fig. 18.

auf  $\Pi_2$  senkrechten Durchmesser  $EF$  als  $E_s F_s$  ab. Die Kugel schneidet die Ebene  $\Pi_2$  in dem Hauptkreise  $m = ADBC$  und berührt  $\Pi_1$  in dem Punkte  $A$ . Die durch  $EF$  horizontal bzw. vertikal gelegten Ebenen schneiden die Kugel in zwei weiteren Hauptkreisen  $n$  und  $h$ , deren Bilder als Ellipsen mit den konjugierten Durchmessern  $CD$  und  $E_s F_s$ , bzw.  $AB$  und  $E_s F_s$  bestimmt werden. — Der wahre Umriß der Kugel für die schiefe Projektion ist ein Hauptkreis  $u$ , dessen Ebene auf dem Sehstrahl  $o = EE_s$  senkrecht steht. Der Durchmesser  $NO$  von  $u$  liegt in der Bildebene ( $NO \perp o''$ ,  $o'' = E_s M$ ) und ist zugleich die kleine Achse des scheinbaren Umrisses  $u_s$ . Seine große Achse  $P_s Q_s$  ist das Bild des Durchmessers  $PQ$  von  $u$ , der auf



$NO$  senkrecht steht. Die in  $E_s M$  normal zu  $\Pi_2$  errichtete Ebene enthält sowohl  $o$  als auch  $PQ$ ; durch ihre Umlegung in die Bildebene ergibt sich zunächst  $o_0 = NE_s$  und dann der umgelegte Durchmesser  $P_0 Q_0$  rechtwinklig zu  $o_0$ . Die durch  $P_0$  und  $Q_0$  parallel zu  $o_0$  gezogenen Strahlen schneiden auf  $E_s F_s$  die Punkte  $P_s$  und  $Q_s$  aus. Für die gesuchte Halbachse der Ellipse  $u_s$  gilt auch  $MP_s = NE_s$ , denn die Dreiecke  $NE_s M$  und  $MP_s P_0$  sind kongruent, und folglich sind  $E_s$  und  $F_s$  die Brennpunkte von  $u_s$ . Die Umrißellipse  $u_s$  berührt die Bilder der drei Hauptschnitte  $h, m, n$  in je zwei diametral gegenüberliegenden Punkten; ihre Tangenten sind in diesen Punkten bzw. parallel zu  $x, y_s$  und  $z$ , da die geraden Kreiszylinder durch  $h, m, n$  die Kugel berühren und folglich gleiches für ihre Umrisse gilt. Die Berührungssehnern der Bilder  $h_s, m, n_s$  mit dem scheinbaren Umriß  $u_s$  sind nichts anderes als die Bilder der Spuren der Umrißebene mit den Ebenen von  $h, m$  und  $n$ . Man zeichne daher das Spurendreieck einer zur Umrißebene parallelen Ebene; dann sind jene Berührungssehnern bzw. parallel zu den Bildern der Seiten des Spurendreieckes (in der Figur nicht gezeichnet).

Die Lichtgrenze auf der Kugel ist der Hauptkreis  $v$ , dessen Ebene senkrecht zur Lichtstrahlrichtung steht. Sein Bild, die Ellipse  $v_s$ , bestimmt man aus zwei konjugierten Durchmessern, denen rechtwinklige des Kreises  $v$  entsprechen. Wir ziehen einen Lichtstrahl  $l$  durch das Kugelzentrum  $M$  und bestimmen seinen Spurpunkt  $M_*$  in  $\Pi_1$  sowie dessen Bild  $M_{*s}$ . Zwei rechtwinklige Durchmesser  $UV$  und  $XV$  von  $v$  finden sich in der Bildebene selbst und in der senkrecht zu ihr durch  $l$  gelegten Ebene.  $UV$  ist rechtwinklig zu  $l' = MM_*$ ). Legt man  $l$  um  $l''$  nach  $l^0$  in die Bildebene um, so gelangt  $MX$  in die zu  $l^0$  rechtwinklige Lage  $MX^0$  ( $l^0 = MM_{*s}^0$ ,  $M_{*s}'' M_{*s}^0 = M_{*s}'' M_{*s}$  und  $\perp MM_{*s}''$ ). Man findet demnach  $MX_s$  aus der Bemerkung, daß die betrachtete Figur sowohl zu ihrer Umlegung als auch zu ihrem Bilde affin liegt und zwar beide Male in bezug auf die Achse  $l''$ ; es sind also auch Umlegung und Bild, z. B.  $M_{*s}^0$  und  $M_{*s}$ ,  $X^0$  und  $X_s$  affin. Sind die konjugierten Durchmesser  $UV$  und  $X_s Y_s$  von  $v_s$  bestimmt, so erhält man die Grundrisse  $U' V'$  und  $X_s' Y_s'$ ; erstere liegen auf  $x$ , letztere ergeben sich aus  $X_s Y_s$  und  $X'' Y''$  ( $X^0 X'' \perp l''$ ,  $X''$  auf  $l''$ ). Die Bilder der zugehörigen Grundrißschatten findet man dann nach 22; sie bilden konjugierte Durchmesser der Ellipse  $v_{*s}$ , also des Bildes der Schlagschattengrenze in  $\Pi_1$ . — Ein zweites Verfahren zur Darstellung der Eigen- und Schlagschattengrenzen der Kugel geht von den rechtwinkligen Durchmessern  $GH$  und  $JK$  des Kreises  $v$  aus, von denen der erste in der

horizontalen Diametralebene, der andere in der senkrecht zu ihr durch  $l$  gelegten Ebene gefunden wird ( $JK \perp l$ ). Der Grundriß  $AG'$  des Halbmessers  $MG$  ist senkrecht zu  $M_*A (= l')$  zu ziehen und ergibt sofort  $G'_s$  und  $G_s$ . Legt man ferner die Ebene  $AMM_*$  durch Drehung in die Bildebene um, wobei  $M_*$  in  $M_{*A}$  auf  $x$  übergehen mag ( $AM_{*A} = AM_s$ ), so nimmt  $J$  die Lage  $J_A$  auf dem Kreise  $ADBC$  ein, für welche  $MM_A \perp MM_{*A}$  ist; das Bild  $J_s$  entspricht dem Punkte  $J_A$  ebenso wie  $M_{*s}$  dem Punkte  $M_{*A}$  durch Affinität in bezug auf die Achse  $AB$ . Was die Bilder der Grundrißschatten der Durchmesser  $GH$  und  $JK$  betrifft, so ist  $G_{*s}H_{*s} \parallel G_sH_s$  und  $J_{*s}K_{*s}$  liegt auf  $l'_s$  ( $J_sJ_{*s} \parallel K_sK_{*s} \parallel l_s$ ). Die Ellipsen  $v_s$  und  $v_{*s}$  sind perspektivaffin; die Achse ist durch den Schnittpunkt  $J_sK_s \times l'_s$  parallel zu  $G_sH_s$  zu ziehen.

27. Wir geben im folgenden Darstellungen der Flächen 2. Grades in schiefer Projektion, indem wir ihre Achsen bzw. die in ihren Symmetrieebenen gelegenen Hauptschnitte als bekannt voraussetzen (vgl. 162 Bd. III).

Ein Ellipsoid sei durch seine Halbachsen  $OX, OY, OZ$  gegeben, von denen wir  $OX$  und  $OZ$  in der Bildebene selbst annehmen, während  $OY$  durch das Bild  $OY_s$  (nach Annahme eines bestimmten Verkürzungsverhältnisses) fixiert wird (Fig. 19). Es sind dann  $OY_s$  und  $OZ$ ,  $OZ$  und  $OX$ ,  $OX$  und  $OY_s$  Paare konjugierter Durchmesser für drei Ellipsen  $l_s, m, n_s$ , welche die Hauptschnitte des Ellipsoides darstellen. Der wahre Umriss  $u$  des Ellipsoides liegt in der zur

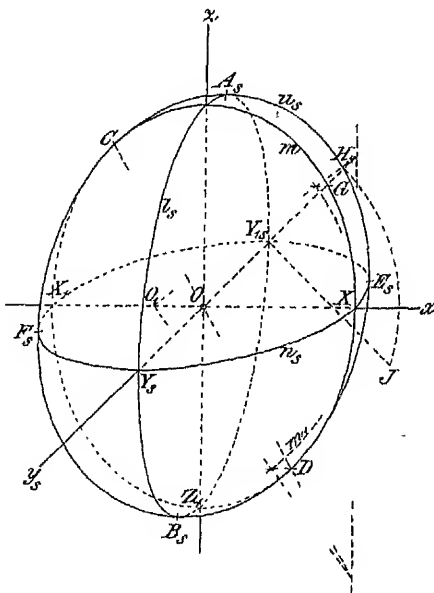


Fig. 19.

Sehstrahlrichtung konjugierten Diametralebene; der scheinbare Umriss  $u_s$  ist ebenso wie die Ellipsen  $l_s, m, n_s$  aus konjugierten Durchmessern bestimmt, die nach 209 Bd. III gefunden werden. Die Ellipse  $u_s$  berührt in den Endpunkten ihrer zu  $x, y_s$  und  $z$  konjugierten Durchmesser die Ellipsen  $l_s, m, n_s$ , woraus die Berührungspunkte auf den letzteren leicht konstruiert werden. Man findet z. B. für die



Ellipse  $m$  den Halbmesser  $OG$  auf  $y_s$  und seinen konjugierten Halbmesser  $OD$  mit Hilfe eines affinen Kreises, der um  $O_1$  (auf  $x$ ) mit dem Radius  $O_1X = OZ$  geschlagen ist; die Affinitätsachse geht durch  $X$  parallel zu  $z$ , die Affinitätsstrahlen liegen parallel zu  $x$ . Ist noch  $F_{1s}$  rechtwinklig zu  $y_s$  und gleich  $OG$ , ferner  $OH_s$  auf  $y_s$  gleich  $OJ$ , so sind  $OD$  und  $OH_s$  konjugierte Halbmesser von  $u_s$ .

28. Ein einschaliges Hyperboloid sei durch seine beiden reellen Halbachsen  $OX$  und  $OY$  und die imaginäre Halbachse  $OZ$

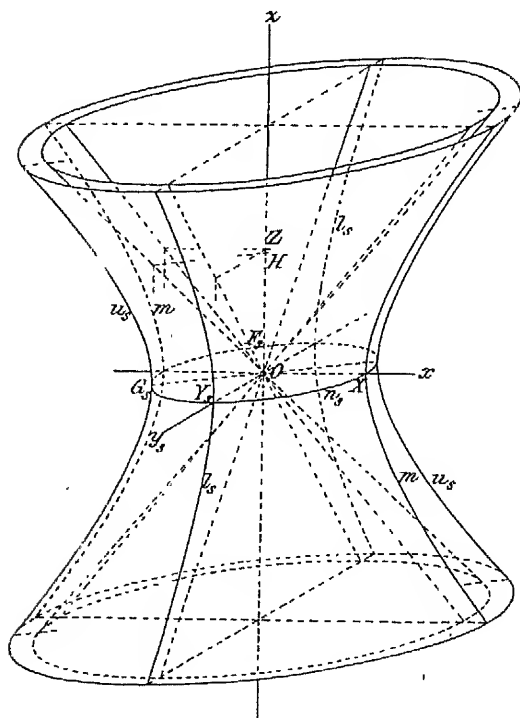


Fig. 20.

gegeben. Wir benutzen die Ebene  $OXZ$  als Bildebene und stellen  $OY$  in schiefer Projektion als  $OY_s$  dar (Fig. 20).  $OY_s$  und  $OZ$  sind konjugierte Halbmesser der Hyperbel  $l_s$ , die als Bild des zu  $x$  normalen Hauptschnittes  $l$  auftritt; ihre Asymptoten haben die Richtungen der Diagonalen des aus  $OY_s$  und  $OZ$  (als Seiten) gebildeten Parallelogrammes.  $OZ$  und  $OX$  bilden die imaginäre, bzw. reelle Halbachse der in der Bildebene selbst gelegenen Hauptschnittshyperbel  $m$ . Die Asymptotenpaare der Kurven  $l$  und  $m$  bilden die ent-

sprechenden Hauptschnitte des Asymptotenkegels unseres Hyperboloides. Der zu  $z$  normale Hauptschnitt  $n$  wird durch die Ellipse  $n_s$  dargestellt, für welche  $OX$  und  $OY_s$  konjugierte Halbmesser sind. Die Querschnitte, normal zu  $z$ , die das Hyperboloid und seinen Asymptotenkegel unten und oben begrenzen, werden durch Ellipsen dargestellt, die zu  $n_s$  ähnlich und ähnlich gelegen sind. Die zur Sehstrahlrichtung konjugierte Diametralebene schneidet das Hyperboloid in dem wahren Umriß  $u$ , einer Hyperbel, und den Asymptoten-

kegel in den zugehörigen Asymptoten, die den wahren Umriß dieses Kegels bilden. Den scheinbaren Umriß  $u_s$  (und seine Asymptoten) bestimmt man aus konjugierten Durchmessern, die nach 213 Bd. III gefunden werden. Man findet zuerst in der Ellipse  $n_s$  den auf  $z$  gelegenen Halbmesser  $OF_s$  und seinen konjugierten  $OG_s$ . Macht man sodann  $OH$  auf  $Z$  gleich der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich  $OZ$  und dessen andere Kathete gleich  $OF_s$  ist, so bilden  $OG_s$  und  $OH$  konjugierte Halbmesser der Hyperbel  $u_s$ .

29. Ein zweischaliges Hyperboloid habe  $OX$  und  $OY$  als imaginäre und  $OZ$  als reelle Halbachse; wir stellen die Achsen wie vorher dar (Fig. 21). Dann sind  $OY_s$  und  $OZ$ , bzw.  $OX$  und  $OZ$  konjugierte Halbmesser bzw. Halbachsen der Hyperbeln  $l_s$  und  $m$ , welche die zu  $x$  und  $y$  normalen Hauptschnitte darstellen; der dritte Hauptschnitt ist imaginär. Die Asymptotenpaare der Hauptschnitte bilden wiederum die entsprechenden Hauptschnitte des Asymptotenkegels, der hiernach bestimmbar ist. Die zu  $z$  normalen Querschnitte, welche das Hyperboloid und seinen Asymptotenkegel unten und oben begrenzen, sind Ellipsen und zu der aus den konjugierten Halbmessern  $OX$  und  $OY_s$  konstruierbaren Ellipseähnlich und ähnlich gelegen. Der wahre und der scheinbare Umriß werden von Hyperbeln  $u$  und  $u_s$  gebildet; die letztere konstruiert man nach 213 Bd. III. Man findet die konjugierten Halbmesser  $OG_s$  und  $OH$  von  $u_s$  genau wie beim einschaligen Hyperboloid, nur ist jetzt  $OG_s$  ein imaginärer und  $OH$  ein reeller Durchmesser.

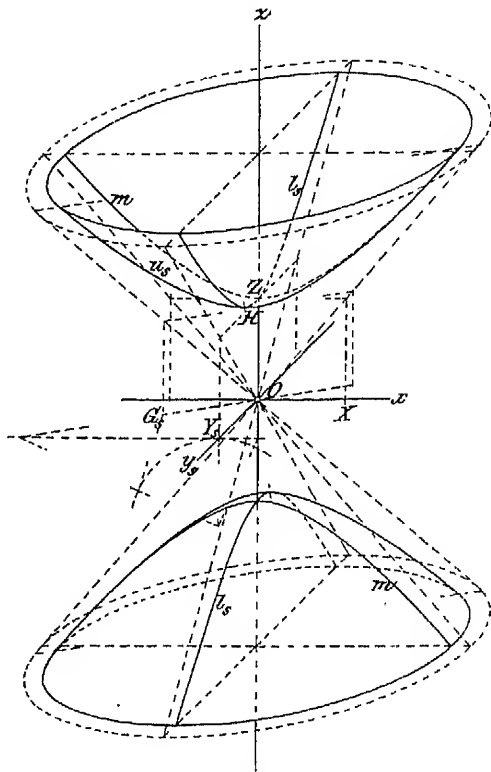


Fig. 21.

lich und ähnlich gelegen. Der wahre und der scheinbare Umriß werden von Hyperbeln  $u$  und  $u_s$  gebildet; die letztere konstruiert man nach 213 Bd. III. Man findet die konjugierten Halbmesser  $OG_s$  und  $OH$  von  $u_s$  genau wie beim einschaligen Hyperboloid, nur ist jetzt  $OG_s$  ein imaginärer und  $OH$  ein reeller Durchmesser.

30. Wir schalten eine Überlegung ein, die sich auf die Aufgabe bezieht: eine Parabel zu zeichnen, wenn zwei ihrer Punkte  $P$  und  $Q$ , die Tangente  $t$  in  $P$  und ein Durchmesser  $d$  gegeben sind (Fig. 22). Zieht man durch den Mittelpunkt  $M$  der Sehne  $PQ$  eine Parallele zu  $d$ , so trifft sie  $t$  in  $W$  und  $QW$  ist die Parabeltangente in  $Q$ . Ist nun  $S$  der Scheitel,  $UV$  die Scheiteltangente und  $T$  der Schnittpunkt der Achse mit  $PQ$ , so ist  $TUWV$  ein Parallelogramm (vgl. 263 Bd. I) und  $TW$  halbiert  $UV$ , sowie die dazu parallele Strecke  $PR$ , wo  $R$  auf  $QW$  liegt. Man zeichne also  $MW$ ,  $WQ$  und  $PR \perp MW$ ; halbiert man  $PR$  in  $N$ , so ist  $T = PQ \times WN$

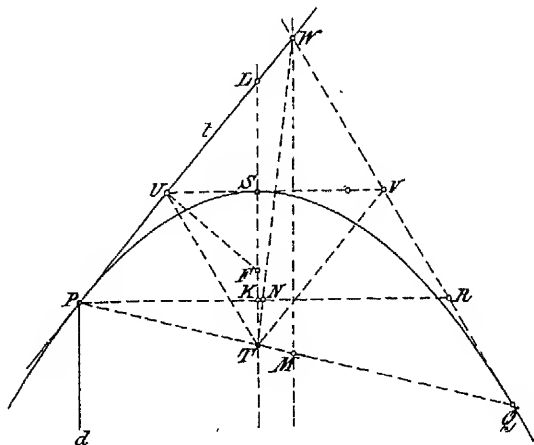


Fig. 22.

ein Punkt der Achse und der Scheitel  $S$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $KL$ , wenn die Achse die Linien  $PR$  und  $t$  bzw. in  $K$  und  $L$  schneidet. Der Brennpunkt  $F$  liegt auf der zu  $LU$  senkrechten Geraden  $UF$ ; denn nach 92 Bd. III liegen die Fußpunkte der vom Brennpunkte auf die Parabeltangenten gefällten Lote auf der Scheiteltangente.

31. Ein elliptisches Paraboloid werde durch seine in  $\Pi_1$  bzw.  $\Pi_2$  gelegenen Hauptschnitte  $l$  und  $m$  gegeben; es sind dies zwei Parabeln, die auf derselben Seite von  $\Pi_1$  liegen, deren Achsen mit der Flächenachse  $z$  und deren Scheitel mit dem Flächenscheitel  $O$  zusammenfallen (Fig. 23). Wir wählen auf  $z$  außerhalb der Fläche einen Punkt  $K$ , dessen Polarebene die  $z$ -Achse in  $S$  ( $OS = OK$ , vgl. 262 Bd. I) und das Paraboloid in der Ellipse  $k$  schneidet; durch  $k$  denken wir uns die Fläche begrenzt. Die Parabeln  $l$  und  $m$  kann man sich etwa durch ihre (auf  $z$  gelegenen) Brennpunkte  $F$  und  $G$

in Verbindung mit den übrigen Angaben bestimmt denken. Man konstruiert dann leicht die Parabeln  $l$  und  $m$ , sowie von ersterer das Bild  $l_s$ , insbesondere aber ihre zu der  $z$ -Achse normalen Sehnen durch  $S$ , nämlich  $AB$  und  $CD$  (bzw. das Bild  $C_s D_s$ ). Wird  $H$  auf  $x$  so gewählt, daß  $\angle KHG = R$  ist, so ist  $SA = 2 \cdot OH$ . Analog ist  $SC_s = 2 \cdot OJ_s$ , wenn  $J$  auf  $y$  und  $\angle KJF = R$ .  $AB$  und  $C_s D_s$  bilden konjugierte Durchmesser der Ellipse  $k_s$ , die hiernach konstruierbar ist. Liegen  $L$  und  $M_s$  auf  $AB$  bzw.  $C_s D_s$  unendlich fern und ist  $N$  der unendlich ferne Punkt der  $z$ -Achse (also auch der des Paraboloides), so hat man die zu den Richtungen  $SL$  und  $SM_s$  konjugierten Durchmesser  $NP$  bzw.  $NQ$  der Parabeln  $l_s$  und  $m$ , sowie die Polare  $UV$  von  $K$  in bezug auf die Ellipse  $k_s$  zu konstruieren. Nach

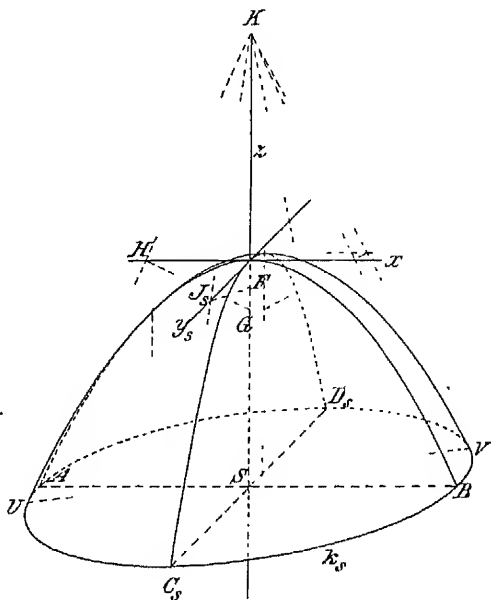


Fig. 23.

202 Bd. III sind dann  $N, P, Q, U, V$  Punkte der Parabel  $u_s$ , die den scheinbaren Umriß unserer Fläche bildet;  $P$  ist ihr Scheitel und ihre Achse liegt parallel zu  $z$ . Hiernach kann  $u_s$  gezeichnet werden.

32. Ein hyperbolisches Paraboloid sei durch seine beiden Hauptschnittparabeln  $l$  und  $m$  in den Ebenen  $\Pi_3$  bzw.  $\Pi_2$  gegeben. Der Flächenscheitel bilde den Ursprung  $O$  und  $\Pi_1$  sei die zugehörige Tangentialebene. Von den Parabeln  $l$  und  $m$  seien die Brennpunkte  $F$  und  $G$  auf  $z$  gegeben; aus ihnen werden  $l$  und  $m$ , sowie das Bild  $l_s$  konstruiert (Fig. 24). Wir wählen auf der  $z$ -Achse zwei von  $O$  gleichweit entfernte Punkte  $J$  und  $K$ . Die Polarebene von  $K$  geht parallel zu  $\Pi_1$  durch  $J$  und schneidet das Paraboloid in einer Hyperbel  $k$ ; ihre Scheitel  $C$  und  $D$  sind die Schnittpunkte der Parabel  $l$  mit der Polare des Punktes  $K$  und werden ebenso wie in 31 dargestellt. Ferner ziehe man die Polare von  $J$  in bezug auf  $m$  durch  $K$  parallel zu  $x$  und bestimme auf ihr in analoger Weise die Punkte  $A$  und  $B$

der Parabel  $m$ . — Je zwei zur Ebene  $\Pi_3$  parallele Schnitte unserer Fläche sind kongruente Parabeln, denn sie liegen zugleich auf einem Zylinder (142, 149 Bd. III). In den durch  $A$  und  $B$  gelegten Parallelebenen zu  $\Pi_3$  findet man daher die zu  $l$  kongruenten Parabeln  $n$  und  $o$ ; ihre Bilder sind kongruent zu  $l_s$ , die Achsen parallel zu  $z$  und ihre Scheitel entsprechen sich in derselben Weise wie die Punkte  $O$  und  $A$  bzw.  $B$ . Wir denken uns das hyperbolische Paraboloid durch die Kurven  $k$ ,  $n$  und  $o$  begrenzt. Die von  $A$  bzw.  $B$  auf die  $x$ -Achse gefällten Lote sind gleich  $OJ$ ; die durch ihre Fuß-

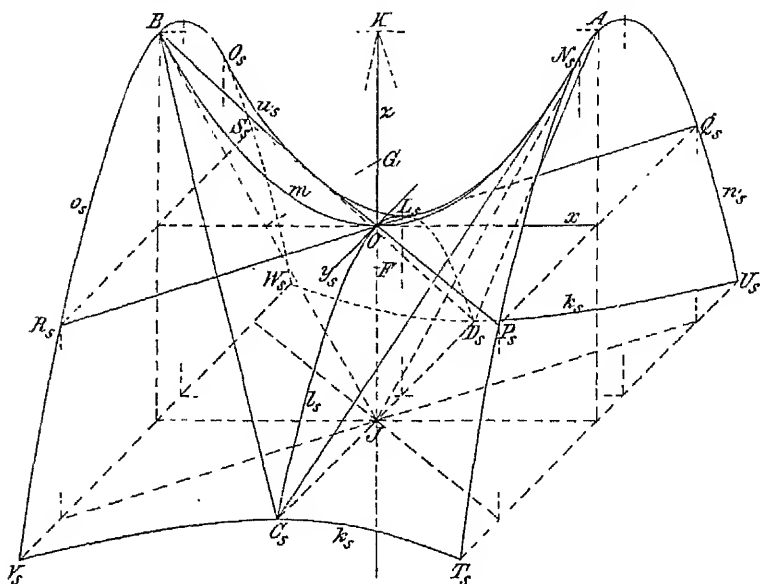


Fig. 24.

punkte parallel zu  $y$  gezogenen Sehnen  $PQ$  und  $RS$  von  $n$  bzw.  $o$  liegen in  $\Pi_1$  und sind gleich  $CD$ . Daher bilden die Linien  $PS$  und  $QR$  den Schnitt der Fläche mit der Tangentialebene in  $O$ , da je drei ihrer Punkte auf dieser liegen. Ferner ist  $APCO$  ein Parallelogramm, dessen Ecken der Fläche angehören, und da die eine Diagonale  $OP$  auf ihr liegt, gilt dies auch von der anderen  $AC$ . Ebenso sind  $CB$ ,  $BD$ ,  $DA$  Erzeugende des Paraboloides;  $AC$ ,  $QR$ ,  $DB$  gehören der einen Schar von Erzeugenden an,  $AD$ ,  $PS$ ,  $CB$  der anderen. Die Bilder dieser sechs Geraden sind in die Figur eingetragen. Die Parallelen durch  $J$  zu  $PS$  und  $QR$  bilden die Asymptoten der Hyperbel  $k$ ; zu ihnen sind die Grundrisse beider Erzeugendenscharen parallel.

Es bleibt noch übrig, die zu den Richtungen von  $x$  bzw.  $y_s$  konjugierten Durchmesser der Parabeln  $l_s$  und  $m$  zu bestimmen. Ersterer endigt in dem Scheitel  $L_s$  von  $l_s$ , letzterer in dem Punkte  $M$  von  $m$ . Nach 202 Bd. III sind dann  $L_s$  und  $M$  Punkte des scheinbaren Umrisses der Fläche, nämlich einer Parabel  $u_s$ , und zwar ist  $L_s$  ihr Scheitel und ihre Achse ist parallel zu  $z$ . Hieraus ist sie nach 30 konstruierbar. In dem Berührungspunkte  $O_s$  der Parabel  $o_s$  mit  $u_s$  endigt ihr zur Richtung  $BJ$  konjugierter Durchmesser. Denn  $BJ$  ist eine Mantellinie des Zylinders, der das Hyperboloid längs der Parabel  $o$  berührt, da  $BJ$  die Tangente von  $m$  in  $B$  also auch eine Tangente des Hyperboloides und  $\Pi_2$  Symmetrieebene von Hyperboloid und Zylinder ist. Demnach gehört  $O_s$  dem Umriß dieser beiden Flächen an. Analog findet man den Berührungspunkt  $N_s$  von  $u_s$  und  $n_s$  als Endpunkt des zur Richtung  $AJ$  konjugierten Durchmessers.

33. Wir erläutern das Verfahren der schiefen Projektion schließlich noch an dem Beispiele eines Rotationskörpers, der als architektonisches Glied an runden Postamenten öfters vorkommt. Die Rotationsachse  $a$  sei vertikal gestellt, die Bildebene  $\Pi_2$  durch sie gelegt und in dieser der Meridianschnitt des Körpers gegeben. Der Halbmeridian besteht aus den Strecken  $BC$  und  $OG$  (die beide  $a$  senkrecht schneiden),  $CD$  und  $FG$  (beide parallel zu  $a$ ) und aus einem Kurvenbogen  $m$ , der seine konvexe Seite der Achse zukehrt (Fig. 25 u. 26). Um einfache Konstruktionen zu haben, setzen wir die Kurve  $m$  aus zwei Kreisbogen zusammen, die in  $E$  eine gemeinsame, zu  $a$  parallele Tangente haben, während ihre Tangenten in den Endpunkten  $D$  und  $F$  horizontal liegen. Die Zentren der betreffenden Kreise seien  $M$  und  $N$ . Der darzustellende Körper besteht also aus drei Teilen, nämlich aus zwei zylindrisch begrenzten ebenen Platten und einem mittleren Teil, dessen Oberfläche hyperbolisch gekrümmt ist. Um letzteren handelt es sich hauptsächlich; wegen seiner Darstellung vergleiche man 380 und 381 Bd. I. Damit wir den Körper samt Eigen- und Schlagschatten abbilden können, müssen noch die Richtungen der Sehstrahlen  $o$  und der Lichtstrahlen  $l$  gegeben sein. Es seien etwa Grundriß und Aufriß derselben  $o'$ ,  $o''$  und  $l'$ ,  $l''$  bekannt, woraus man leicht ein Projektionsdreieck, sowie  $l_s$ ,  $l'_s$  konstruiert.

Wie die zylindrischen Teile unseres Körpers abgebildet, wie ihre Eigenschattengrenzen und die Grenzen ihres Schlagschattens auf die Grundrißebene dargestellt werden, bedarf keiner Erklärung mehr (man vgl. 24).



baren Umrisses parallel zu  $a$ . Es gibt einen höchsten und tiefsten Parallelkreis, der vom wahren Umriß berührt wird. Der Sehstrahl des Berührungspunktes tangiert den betreffenden Meridian und enthält die Spitze des Tangentialkegels, der dem betreffenden Parallelkreis zugehört. Wird also ein Sehstrahl  $o$  (durch  $S$ ) um die Achse  $a$  bis in die Bildebene gedreht, so schneiden die zum gedrehten Sehstrahl  $o_A$  parallelen Tangenten des Hauptmeridians  $m$  die Achse in den Bildern  $V_s$  und  $W_s$  des höchsten und tiefsten Umrißpunktes.

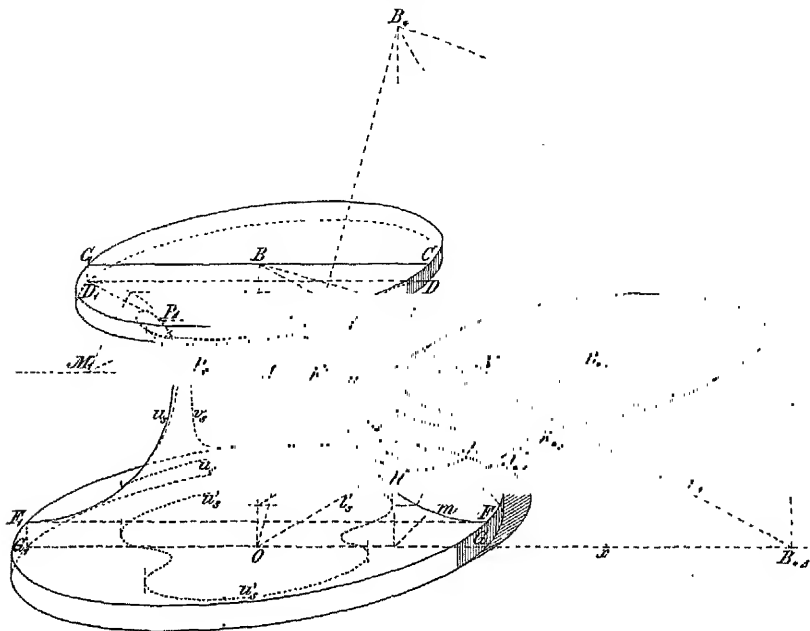


Fig. 26.

Die bezüglichen Tangenten von  $u_s$  werden als Bilder der entsprechenden Parallelkreistangenten leicht bestimmt. In den Schnittpunkten des Umrisses  $u$  mit dem Hauptmeridian  $m$  steht die den Sehstrahl enthaltende Tangentialebene auf der Bildebene senkrecht und folglich sind die Tangenten von  $m$  in ihnen parallel zum Aufriß  $o''$ ; hieraus werden die genannten Punkte auf  $m$  gefunden. An vier Stellen wird der Umriß  $u$  von Sehstrahlen berührt, die Haupttangenten der Fläche bilden; den Berührungspunkten entsprechen Spitzen des scheinbaren Umrisses und beim Bilde  $u'_s$  seines Grundrisses die Berührungspunkte der zu  $o'_s$  (also zu  $a$ ) parallelen Tangenten. Diese Bemerkung dient zur Auffindung der vier Spitzen, falls genügend viele Punkte von  $u_s$  und  $u'_s$  bekannt sind.



Um die Lichtgrenze  $v$  auf unserer Fläche zu finden, wenden wir wiederum das Kegelfverfahren an, setzen aber an Stelle der Sehstrahlen  $o$  die Lichtstrahlen  $l$ ; im Prinzip wird hierdurch nichts geändert. Das Bild  $v_*$  der Lichtgrenze berührt den scheinbaren Umriß  $u_*$  an zwei Stellen; die Berührungspunkte sind aus den Schnittpunkten von  $u'_*$  und  $v'_*$  abzuleiten (in der Figur ist  $v'_*$  nicht eingetragen). Genauer erhält man diese Stellen, wenn man durch  $B$  einen Licht- und einen Sehstrahl zieht, die den Grundriß in  $B_*$  bzw.  $B_0$  schneiden mögen. Dann besitzt der Kegel mit der Spitze  $B$ , dessen Basiskreis in  $\Pi_1$  um  $O$  beschrieben ist und die Gerade  $B_*B_0$  berührt, eine zu  $l$  und  $o$  parallele Tangentialebene. Seine in der Bildebene liegenden Mantellinien treffen  $x$  in Punkten, deren Abstände von  $O$  gleich der Länge des von  $O$  auf  $B_*B_0$  gefällten Lotes sind. Zieht man zu diesen Mantellinien parallele Tangenten an den Hauptmeridian  $m$ , so fallen für die die Berührungspunkte enthaltenen Parallelkreise Umriß und Lichtgrenze zusammen. Sind hinreichende Punkte der Lichtgrenze  $v$  im Bilde und Grundrißbilde bestimmt, so findet man leicht die Bilder ihrer Schatten auf  $\Pi_1$  und damit die Schlagschattengrenze  $v_*$ .

Wir haben noch nötig, von den Grenzen des Schlagschattens des Körpers auf sich selbst zu sprechen. An die Lichtgrenze setzen sich in den Punkten, wo sie von Lichtstrahlen berührt wird, in der Richtung derselben Schlagschattengrenzen an, z. B.  $HJ$ ; das Bild  $H_*$  des Ansatzpunktes ist der Berührungspunkt von  $u_*$  mit einer zu  $l_*$  parallelen Tangente. Der Endpunkt  $J$  auf dem Parallelkreis durch  $F$  entspricht dem Schnittpunkte  $J_*$  des Kreisschattens mit der Kurve  $v_*$ ; die Schlagschattentangente in  $J$  ist zur Tangente von  $v_*$  in  $J_*$  parallel. Der untere Rand der zylindrischen Deckplatte wirft auf den mittleren Teil unseres Körpers Schatten; seine Begrenzung endigt in den Punkten von  $v$ , die den Überschneidungen von  $v_*$  mit dem Randschatten in  $\Pi_1$  entsprechen ( $K$  und  $K_*$ ) und besitzt daselbst zu  $l_*$  parallele Tangenten. Der höchste Punkt des Randschattens wird bestimmt, indem man die zum Lichtstrahl parallele Meridianebene in die Bildebene umdreht und den mitgedrehten Lichtstrahl durch den Randpunkt  $D_1$  mit dem Hauptmeridian schneidet; hierauf ist die der Rückwärtsdrehung entsprechende Konstruktion auszuführen. Vergleicht man die hier beschriebenen Konstruktionen mit denjenigen, wie sie in Kap. VIII Bd. I bei der Darstellung der Rotationsflächen in Orthogonalprojektion verwendet wurden, so erkennt man, daß die gesuchten Umriß- und Lichtgrenzpunkte hier genau so wie dort bestimmt und dann erst in schiefe Projektion

umgesetzt werden; nur schließt sich diese Umsetzung direkt an die Konstruktion der einzelnen Punkte in Orthogonalprojektion an.  $u'_s$  hat man nicht nötig zu zeichnen; man kann die Spitzen des scheinbaren Umrisses  $u_s$  auch dadurch erhalten, daß man an  $u''$  die zu  $o''$  parallelen Tangenten zieht; die Punkte von  $u''$  werden ja aber schon bei der Konstruktion von  $u_s$  erhalten. Ebenso kann man  $v'_s$  bei der Konstruktion von  $v_{s,s}$  entbehren, da hierzu  $v_s$  und  $v''$ , das sich ja bei der Bestimmung von  $v_s$  nebenbei ergibt, genügen. Sind  $X_s$  und  $X''$  zwei zusammengehörige Punkte von  $v_s$  und  $v''$ , so ziehe man durch  $X_s$  und  $X''$  Parallele zu  $o_s$  bzw.  $o''$ , dann ist  $X_{s,s}$  der Schnittpunkt von  $o_s$  und  $o'_s$  ( $o'_s \times o''$  auf  $x$ ).

### **Das Verfahren der schiefen Projektion, wenn Bild- und Aufrißebene vertikal, aber gegeneinander geneigt sind.**

34. Wir nehmen an, daß Bild- und Aufrißebene sich in der  $z$ -Achse schneiden, was ohne Wirkung auf das Bild erlaubt ist. Die Grundrißebene, welche die Achsen  $x$  und  $y$  enthält, schneidet die Bildebene in einer Geraden  $g$ , die wir Grundlinie nennen wollen; um diese Grundlinie werde der Grundriß in die Bildebene  $\Pi$  umgelegt<sup>5)</sup>. Punkte und Linien des umgelegten Grundrisses sollen ganz ebenso bezeichnet werden wie die betreffenden Elemente im Grundriß selbst. Wird der Aufriß um die  $z$ -Achse in die Bildebene umgelegt, so sollen auch hier die umgelegten Punkte und Linien die gleiche Bezeichnung tragen wie im Aufriß selbst. Die Bilder der Raumpunkte und Linien, sowie ihrer drei Risse erhalten den Index  $s$ , um sie zu kennzeichnen. Endlich finden gelegentlich noch die Bilder der Risse von Punkten und Geraden (d. h. ihre orthogonalen Projektionen auf die Bildebene) und die Bildspuren von Ebenen (d. h. ihre Spuren in der Bildebene) Verwendung; wir bezeichnen sie mit  $P^+$ ,  $g^+$ ,  $e_+$  usw.

Sind  $g$ ,  $z$ ,  $y$  und  $x$  gegeben, so ist  $\angle gx = \alpha$  der Neigungswinkel der Aufrißebene gegen die Bildebene; kennt man außerdem noch die Sehstrahlrichtung, so ist die schiefe Projektion völlig bestimmt. In Fig. 27 sind die gleichen Strecken  $OX = OY = OZ$  auf die Achsen aufgetragen; sie bilden die Kanten eines Würfels mit der Ecke  $O$ , dessen gegenüberliegende Ecke  $Q$  sein möge. Seine übrigen Ecken sind  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  und  $Q'$ ,  $Q''$ ,  $Q'''$ . Nehmen wir das Bild  $Q_s$  von  $Q$  als gegeben an, so ist auch  $Q'_s$  bekannt ( $Q_s Q'_s = ZO$ ). Sind ferner  $J$  und  $K$  die Schnittpunkte von  $Q'X$  bez.  $Q'Y$  mit  $g$ , so gehen auch die Bilder  $Q'_s X_s$  und  $Q'_s Y_s$  durch  $J$  bez.  $K$ , und die Bilder  $x_s$  und  $y_s$ ,

der Achsen sind zu ihnen parallel; damit sind dann die Bilder sämtlicher Würfelkanten gefunden.

Der um  $g$  umgelegte Grundriß und sein Bild sind affin,  $g$  ist die Affinitätsachse,  $Q'$  und  $Q_s'$  sind ein Paar affiner Punkte. Ebenso ist der um  $z$  umgelegte Aufriß zu seinem Bilde affin,  $z$  ist die Affinitätsachse,  $Q''$  und  $Q_s''$  sind ein Paar affiner Punkte. Besonders erwähnen wir noch, daß die Achse  $x$  und die Punkte auf ihr, z. B.

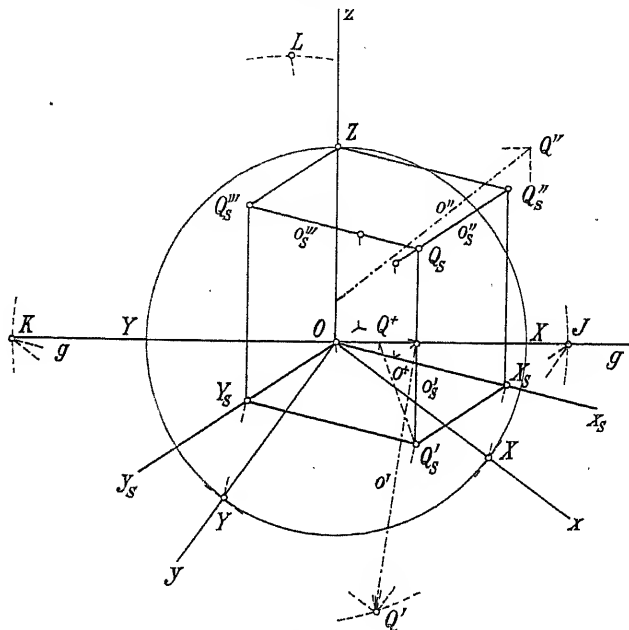


Fig. 27.

$X$ , sowohl in dem umgelegten Grundriß wie in dem umgelegten Aufriß auftreten; beim letzteren fällt  $x$  in die Grundlinie  $g$ .  $X$  (auf  $g$ ) und  $X_s$  sind entsprechende Punkte in der Affinität zwischen dem umgelegten Aufriß und seinem Bilde. Betrachten wir den Sehstrahl  $o = QQ_s$ , so ist  $Q_s$  sein Bildspurpunkt; dessen Grundriß liegt auf  $g$ , und aus beiden ergeben sich unmittelbar vom Spurpunkt  $Q_s$  Auf- und Seitenriß im Bilde. Verbindet man die Bilder der drei Risse des Spurpunktes  $Q_s$  bez. mit  $Q_s'$ ,  $Q_s''$  und  $Q_s'''$ , so erhält man  $o_s'$ ,  $o_s''$  und  $o_s'''$ ; diese Bilder der Sehstrahlrisse fallen auf die Bilder der durch  $Q$  gehenden Würfelkanten. Denn die Ebene durch  $o$  und  $o''$  enthält auch die zu  $y$  parallele Würfelkante durch  $Q$ , so daß ihr Bild und das von  $o''$  aufeinanderfallen; ähnliches gilt für die Ebenen durch  $o$  und  $o'$  bzw. durch  $o$  und  $o'''$ . In der Figur

sind auch noch  $o'$ ,  $o''$  und  $o^+$  eingezeichnet;  $o'$  geht durch  $Q'$  und schneidet sich mit  $o_s'$  auf  $g$ ;  $o''$  geht durch  $Q''$  und schneidet sich mit  $o_s''$  auf  $z$ ;  $o^+$  ist die Orthogonalprojektion von  $Q'Q_s'$  (also einer Parallelen zu  $o$ ) auf die Bildebene.

35. Machen wir jetzt die Annahme, es seien  $z$  und die Bilder  $x_s$  und  $y_s$  der beiden Achsen sowie zwei Strecken  $OX_s$  und  $OY_s$  auf ihnen gegeben. Man soll nun umgekehrt die rechtwinkligen Achsen  $x$ ,  $y$  und auf ihnen die Strecken  $OX = OY$  derart bestimmen, daß sie die vorgeschriebenen Bilder besitzen. Zu diesem Zweck vervollständige man  $OX_s$  und  $OY_s$  zu einem Parallelogramm mit der vierten Ecke in  $Q_s'$ ; seine beiden Seiten durch  $Q_s'$  mögen  $g$  in  $J$  und  $K$  schneiden (Fig. 27). Darauf beschreibe man über  $JK$  als Durchmesser einen Kreis, halbiere den Halbkreisbogen  $JK$  in  $L$  und ziehe  $OL$ ; diese Gerade schneidet den gesuchten Punkt  $Q'$  aus dem Kreise aus. Zieht man nämlich  $Q'J$ ,  $Q'K$  und durch  $O$  die Achsen  $x$  ( $\parallel Q'K$ ) und  $y$  ( $\parallel Q'J$ ), so ist  $\angle JQ'K = R$  und  $\angle JQ'O = \angle OQ'K = \frac{1}{2}R$  als Peripheriewinkel über dem Kreisquadranten; deshalb ist  $OXQ'Y$  ein Quadrat und  $OX = OY$  die wahre Länge der Würfelkanten, deren Bildlängen  $OX_s$  und  $OY_s$  sind; die Kante  $OZ$  erscheint in wahrer Größe.

36. Bevor wir zur Darstellung von Objekten in schiefer Projektion übergehen, wollen wir noch kurz zwei besondere schiefe Projektionen besprechen.

Es mögen die Achsen  $z$ ,  $x$ ,  $y$  sowie  $g$  gegeben sein; die Sehstrahlrichtung  $o$  soll so bestimmt werden, daß  $OX_s = OX$  und  $OY_s = \frac{1}{2} OY$  wird ( $OX = OY = OZ$ ). Man sucht dazu wieder wie vorher  $Q'$ ,  $J$  und  $K$  auf (Fig. 28), schlägt um  $K$  einen Kreis mit dem Radius  $KQ'$  und um  $J$  einen Kreis mit dem Radius  $\frac{1}{2} JQ'$ ; beide Kreise schneiden sich dann in

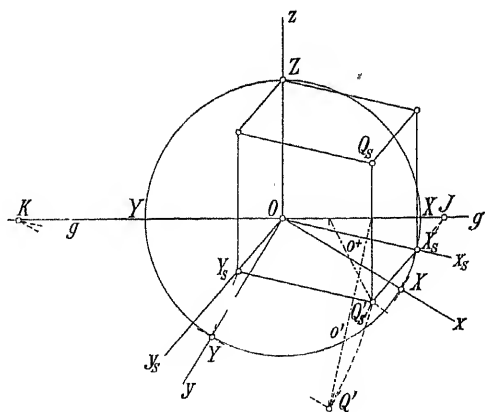


Fig. 28.

dem Bilde  $Q_s'$  von  $Q'$ , woraus sich weiter  $x_s$ ,  $y_s$ ,  $X_s$ ,  $Y_s$  und  $Q_s$  sofort ergeben. Alle zur  $x$ -Achse parallelen Strecken erscheinen hier in natürlicher, alle zur  $y$ -Achse parallelen Strecken in halber natürlicher

Größe. Soll ein zweckentsprechendes Bild entstehen, so darf man  $\angle \alpha = \angle g x$  nicht zu groß annehmen.

Wiederum seien  $x, y, z$  und  $g$  gegeben; eine Ebene, die in der  $z$ -Achse auf der Bildebene senkrecht steht, sei parallel zur Sehstrahlrichtung  $o$ . Dann liegt  $Q'_s$  mit  $Q'$  auf einer Senkrechten zu  $g$  (Fig. 29). Das Bild eines beliebigen Punktes liegt dann nicht nur mit dem Bild seines Grundrisses, sondern auch mit seinem um  $g$  umgelegten Grundriß selbst auf einer Senkrechten zu  $g$ .

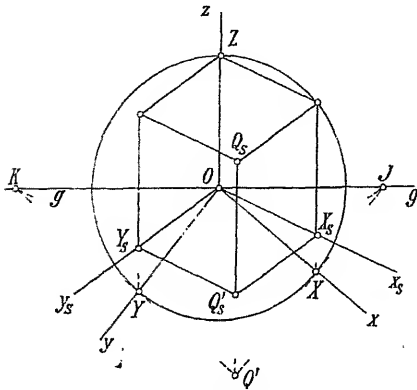


Fig. 29.

Wünscht man insbesondere noch, daß sich die Strecken  $OX$  und  $OY$  bei der Abbildung in einem bestimmten Verhältnis ver-

kürzen, daß also  $OX_s : OX = m$  und  $OY_s : OY = n$  wird ( $OX = OY = OZ$ ), so kann man den Neigungswinkel  $\alpha = \angle g x$  nicht mehr beliebig wählen; er ergibt sich vielmehr durch folgende Überlegung. Setzt man  $\angle x_s g = \delta$  und  $\angle y_s g = \epsilon$ , so erhält man  $OX \cdot \cos \alpha = OX_s \cdot \cos \delta$ , also  $\cos \alpha = m \cos \delta$  und ebenso  $\sin \alpha = n \cos \epsilon$ , ferner  $Q'_s J \cdot \sin \epsilon = Q'_s K \cdot \sin \delta$  oder  $Q' J \cdot n \sin \epsilon = Q' K \cdot m \sin \delta$ . Daraus folgt weiter  $(Q' J)^2 (n^2 - \sin^2 \alpha) = (Q' K)^2 (m^2 - \cos^2 \alpha)$ , und wenn man diese Gleichung von  $(Q' J)^2 \cos^2 \alpha = (Q' K)^2 \sin^2 \alpha$  subtrahiert, kommt  $Q' J \cdot \sqrt{1 - n^2} = Q' K \cdot \sqrt{1 - m^2}$ , also:  $\tan \alpha = \sqrt{1 - m^2} : \sqrt{1 - n^2}$ . Um zu einer reellen Lösung zu gelangen, darf man die Werte  $m$  und  $n$  nicht zu klein nehmen. Kennt man  $\alpha$ , so kann man  $X$  und  $Y$  zeichnen und erhält  $X_s$  und  $Y_s$  sofort mittels der Werte  $m$  bez.  $n$  auf den durch  $X$  bez.  $Y$  zu  $g$  gezogenen Senkrechten.

37. Handelt es sich darum, das Bild eines Gegenstandes in schiefer Projektion zu entwerfen, falls sein Grund- und Aufriß gezeichnet vorliegen, so hat man den Grundriß zunächst in die richtige Lage zu bringen, in der seine  $x$ -Achse mit der vorgeschriebenen  $x$ -Achse zusammenfällt. Hierauf entwirft man das Bild des Grundrisses als eine zu ihm affine Figur und erhält die Bilder der einzelnen Raumpunkte, indem man durch die Bilder ihrer Grundrisse zur  $z$ -Achse parallele Strecken zieht, deren Längen man aus dem Aufriß (als Abstände der Aufrißpunkte von der  $x$ -Achse) entnimmt.

In Figur 30 ist ein Beispiel für die Herstellung des Bildes aus zwei Rissen gegeben. Es handelt sich um ein Tonnengewölbe, in das ein Stichkappengewölbe seitlich einschneidet; beide sind zylindrisch und durchschnitten gedacht von je einer Vertikalebene durch den Scheitel des Tonnen- und Stichkappengewölbes. Bei der Konstruktion des Bildes ist neben dem Aufriß der Seitenriß verwendet, dagegen der Grundriß weggelassen worden; es ist das aus dem Grunde geschehen, weil Auf- und Seitenriß einen besseren Einblick in die sich darbietenden Verhältnisse gewähren. Außerdem ist

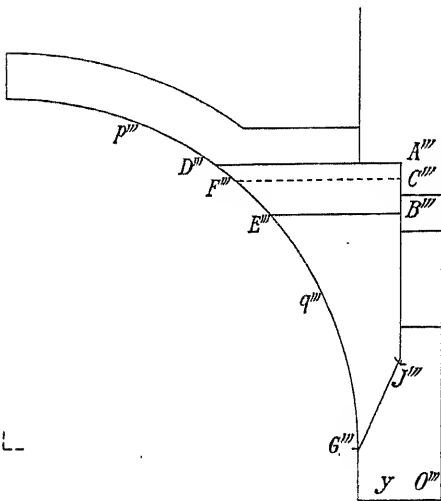


Fig. 30a.

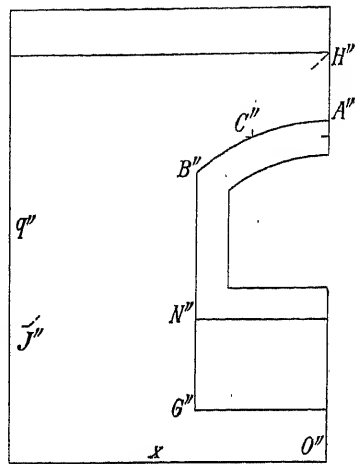


Fig. 30b.

die Sehstrahlrichtung so gewählt worden, daß der vor der Bildebene liegende Teil der Grundrißebene sich oberhalb der Grundlinie  $g$  abbildet; die Sehstrahlen sind also von vorn unten nach rückwärts und oben gerichtet. Durch diese Wahl werden beide Gewölbe sichtbar, worauf es hier in erster Linie ankommt.

In Figur 30c sind  $x$  und  $y$  gegeben und daraus  $x_s$  und  $y_s$  bestimmt, wobei  $o' \perp g$  genommen ist. Trägt man also auf  $x$  bez.  $y$  die betreffenden Strecken aus den Rissen auf und zieht die Senkrechten zu  $g$ , so schneiden sie auf  $x_s$  bzw.  $y_s$  die Bildstrecken ab. Zunächst ist das Bild des Seitenrisses gezeichnet, der zugleich die vordere Randlinie  $p$  des Tonnengewölbes enthält. Seine hintere Randlinie  $q$  liegt in einer Parallelebene zum Seitenriß, ihr Bild ist gegen das von  $p$  in der Richtung  $x_s$  parallel verschoben. Das Stichkappengewölbe besitzt als Basiskurve den Kreisbogen  $ACB$ , dessen Ebene

zum Aufriß parallel ist;  $A$  liegt im Seitenriß, die Bilder von  $C$  und  $B$  ergeben sich aus dem Aufriß, indem man auf der Vertikalen durch  $A_s$  die Höhendifferenz zwischen  $A$  und  $C$  bzw.  $A$  und  $B$  aufträgt, durch die so gewonnenen Punkte Parallele zu  $x_s$  zieht und sie gleich den entsprechend reduzierten Abständen der Punkte  $C''$  bzw.  $B''$  von  $z$  macht. Die Tangente in  $B_s$  schneidet die Vertikale durch  $A_s$  in  $H_s$ , wobei  $A_s H_s = A'' H''$ ;

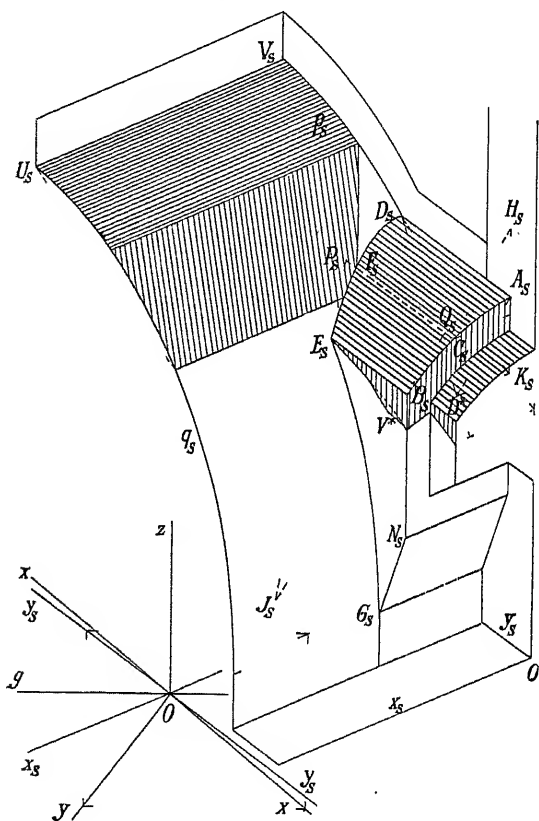


Fig. 30 c.

bei  $A_s H_s = A'' H''$ ; ebenso findet man die Tangente in  $C_s$ . In der Vertikalebene durch den Kreisbogen  $ACB$  liegt noch ein zweiter konzentrischer Kreisbogen, dessen Bild sich in gleicher Weise bestimmt; ein mit ihm kongruenter Bogen liegt in der Aufrißebene selbst. Beide Gewölbe durchdringen sich in der Linie  $DFE$ ; die Strecken  $A_s D_s$ ,  $C_s F_s$ ,  $B_s E_s$  sind zu  $y_s$  parallel, ihre Längen ergeben sich durch Reduktion aus den bez. Längen im Seitenriß. Die Tangente in  $D_s$  ist parallel  $x_s$ , die Tangente in  $E_s$  findet man wie folgt. Die Tangente im Punkte  $E$  der Durchdringungslinie liegt in den beiden Tangentialebenen, welche die Gewölbf lächen im Punkte  $E$  berühren. Ihr Seitenriß berührt den Kreisbogen in  $E''$ , ihr Aufriß den Kreisbogen  $A'' C'' B''$  in  $B'' = E''$ ; sie trifft die Ebene des letztgenannten Kreisbogens in einem Punkte  $J$ , dessen Bild sich aus  $J''$  und  $J'''$  sofort ergibt. Ebenso kann die Tangente in  $F_s$  gezeichnet werden.

In dem Bilde (Fig. 30c) ist noch der Schatten konstruiert. Das Bild des Lichtstrahls  $l_s$  durch  $D_s$  ist beliebig angenommen, ebenso der Schatten  $D^*$  auf die Ebene des Kreisbogens  $ACB$ ;  $l_s'' = A_s D^*$  und  $l_s''' = D_s K_s (A_s K_s \parallel z, D^* K_s \parallel x_s)$ . Der Schlagschatten einzelner Punkte der Durchdringungslinie  $DFFE$  ist sonach einfach zu bestimmen. Man ziehe z. B. durch  $F_s$  die Mantellinie  $F_s C_s$ ; sie wirft auf die Ebenen des Kreisbogens  $ACB$  und des Kreisbogens  $EBG$  Schatten, deren Bilder zu  $l_s''$  bzw.  $y_s$  parallel sind und sich auf  $B_s N_s$  schneiden. Sie werden von der Parallelen zu  $l_s$  durch  $F_s$  in den Bildern des Schlagschattens geschnitten, den  $F$  auf die eine und die andere Ebene wirft. Man kann so beliebig viele Punkte des Schattens der Linie  $DFFE$  auf die beiden Ebenen konstruieren. Insbesondere erhält man die Tangente des Schlagschattens im Punkte  $E_s$  als Schatten der Geraden  $JE$  auf die Fläche  $EBG$ . Zu diesem Zweck nehme man auf  $J_s E_s$  den Punkt  $P_s$  an, ziehe durch ihn eine Parallele zu  $y_s$  und schneide sie mit  $J_s B_s$  in  $Q_s$ ; dann ist  $Q$  der Spurpunkt von  $PQ$  in der Ebene des Kreisbogens  $ACB$ , man erhält also die Schatten von  $P$  auf die Ebenen  $ACB$  und  $EBG$  in der gleichen Weise wie vorher die Schatten von  $F$ . Der Eigenschatten des Tonnengewölbes geht durch den Berührungspunkt von  $p_s$  mit einer zu  $l_s'''$  parallelen Tangente; eine Parallele zu  $l_s'''$  durch  $U_s$  schneidet  $q_s$  in einem Punkt, durch den das Bild des Schlagschattens von  $UV$  geht. Der Schatten von  $V$  fällt nach  $V^*$  auf der Fläche  $EBG$ . Der Schatten auf den Grundriß ist weggelassen.

38. Man kann das Bild eines Gegenstandes aus zwei Rissen auch in folgender Weise ohne Zuhilfenahme des Zirkels gewinnen. Man trenne Grund- und Aufriß längs der  $x$ -Achse auseinander und lege ersteren mit seiner Trennungslinie an die um  $g$  umgelegte  $x$ -Achse, letzteren mit seiner Trennungslinie an die Grundlinie  $g$ , welche ja die um  $z$  umgelegte  $x$ -Achse darstellt. Hierbei ist darauf zu achten, daß Grund- und Aufriß eines Punktes  $P$  durch Loten von  $P'$  auf  $x$  und von  $P''$  auf  $g$  den nämlichen Punkt der Trennungslinie ergeben müssen, daß also die Endpunkte der Lote von  $O$  gleich weit abstehen müssen. Um nun das Bild  $P_s$  eines beliebigen Punktes  $P$  zu zeichnen, lege man durch  $P$  zwei Ebenen parallel zur Sehrichtung und zwar die eine senkrecht zu  $\Pi_1$  und die andere senkrecht zu  $\Pi_2$ . Erstere schneidet  $\Pi_1$  in einer Parallelen zu  $o'$  und die Bildebene in einer Parallelen zu  $z$ ; letztere schneidet  $\Pi_2$  in einer Parallelen zu  $o''$  und die Bildebene in einer Parallelen zu  $y_s$ . Zieht man also einerseits durch  $P'$  eine Parallele zu  $o'$  und durch ihren Schnittpunkt mit  $g$  eine Parallele zu  $z$ , andererseits durch  $P''$  eine Parallele zu  $o''$





und durch  $P'_s$  Parallele zu  $x_s$  und  $y_s$ ; durch ihre Schnittpunkte mit  $h_s$  ziehe man ferner Parallele zu  $x$  bez.  $y$ , sie schneiden sich in einem Punkte  $P'_0$  ( $P'_0 P'_s \parallel X X_s$ ), so daß  $P'_0 Q'_s = P' Q'$  ist; denn  $P'_0 Q'_s$  ist die um  $h_s$  parallel zur Bildebene gedrehte Strecke  $P' Q'$ .

40. Für die folgenden Konstruktionen machen wir die Annahme, daß der Sehstrahl durch den Ursprung  $O$  mit der  $z$ -Achse in einer zur Bildebene senkrechten Ebene liegt, so daß sich alle

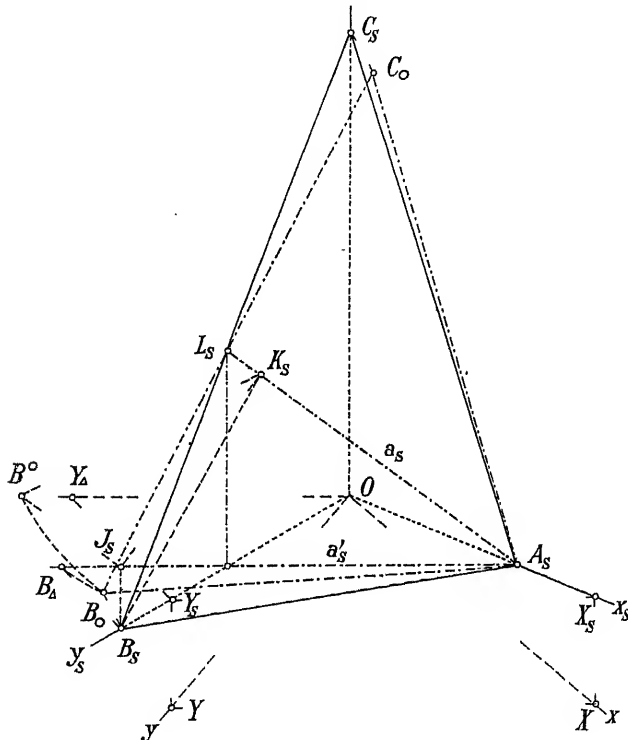


Fig. 32.

Normalen zur Bildebene parallel zur  $z$ -Achse projizieren; zugleich setzen wir fest, daß die Bilder dieser Normalen in halber natürlicher Größe erscheinen sollen. Die Änderungen, die unsere Konstruktionen im allgemeinen Fall erfahren, sind leicht anzugeben; die Bilder der Normalen zur Bildebene, die übrigens mit den Bildern ihrer Grundrisse parallel und von gleicher Länge sind, besitzen alsdann eine beliebige Richtung (sie sind parallel zu  $o^+$  in Fig. 27) und verkürzen sich in einem bestimmten Verhältnis.

Es sei eine Ebene  $E$  mit den Achsenschnittpunkten  $A, B, C$



Ebene um  $JK$  parallel zur Bildebene, so nimmt ihr Bild die bereits gezeichnete Lage  $B^0 J_s K_s$  an, während  $K_s N_s$  in  $K_s N^0$  übergeht ( $K_s N^0 \perp K_s B^0$ ,  $K_s N^0 = KN$ ). Zieht man noch  $N^0 Q_s$  senkrecht zu  $J_s K_s$  und  $Q_s N_s$  vertikal ( $= \frac{1}{2} N^0 Q_s$ ), so ist  $N_s K_s$  das Bild der Normalen und  $N'_s K'_s$  sein Grundriß ( $Q'_s N'_s = Q_s N_s$ ).

Wäre die Normale in einem beliebigen Punkte des Dreiecks  $ABC$  zu errichten, so müßte man noch nachträglich die soeben gefundene Normale verschieben. Wäre aus irgend einem Punkt  $P$  ein Lot auf die Dreiecksebene zu fällen, so hätte man durch  $P_s$  und  $P'_s$  die Parallelen zu  $N_s K_s$  und  $N'_s K'_s$  zu ziehen und den Durchstoßpunkt von  $NK$  mit der Ebene  $ABC$  zu bestimmen.

Ist das Spurendreieck  $ABC$  einer Ebene  $E$  gegeben, so erhält man die Normale entweder wie vorher oder in der folgenden Weise.

Man wähle auf  $BC$  einen Punkt  $Q$  oder lege durch ihn die Parallelebene zur Bildebene, die  $BA$  in  $R$  und  $\gamma$  in  $S$  schneiden

möge (Fig. 34). Dann fälle man von  $B$  das Lot  $BJ$  auf  $RS$  ( $B_s J_s \perp g$ , und trage  $J_s B_s = JB$  ( $= 2 J_s B_s$ ) auf dasselbe auf, so ist  $R_s B_s$  die um  $R_s S_s$  parallel zur Bildebene gedrehte Gerade  $RB$ . Ist  $S_s F_s$  das von  $S_s$  auf  $RB_s$  gefällte Lot, so stellt  $Q_s F_s$  das Bild der Falllinie  $QF$  und  $Q_s F_0$  die um  $Q_s S_s$  parallel zur Bildebene gedrehte Falllinie dar ( $S_s F_0 = S_s F_s$ ). Die Normale  $QP$  liegt in der Ebene  $QSF$ ; wird sie um  $Q_s S_s$  in die

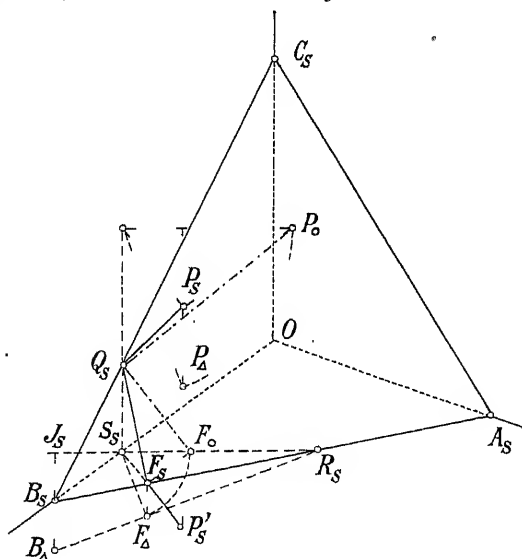


Fig. 34.

Parallelebene zur Bildebene gedreht, so erscheint sie als  $Q_s P_0$  rechtwinklig zu  $Q_s F_0$  und in wahrer Größe. Daraus findet man  $P_s$  und  $P'_s$ . Ist die Normale in einem anderen Punkte zu errichten oder aus einem Punkte auf die Ebene  $ABC$  zu fällen, so ist wieder eine Verschiebung vorzunehmen.

**42. Umriß und Lichtgrenze eines Kegels.** Die Behandlung dieser Aufgabe bildet die Grundlage für die Konstruktion von

Umriß und Lichtgrenze bei Rotationsflächen. Bei axonometrischer Darstellung wird man eine Achse parallel zur Achse des Kegels oder der Rotationsfläche nehmen. Bereits im vorhergehenden Abschnitt wurde eine Rotationsfläche mit vertikaler Achse entworfen, wir wählen deshalb hier die Achse des Kegels horizontal und zwar parallel zu  $y$ . Die Richtung des Sehstrahls mag wieder der Ebene, die in  $z$  auf der Bildebene senkrecht steht, parallel sein, so daß sich die

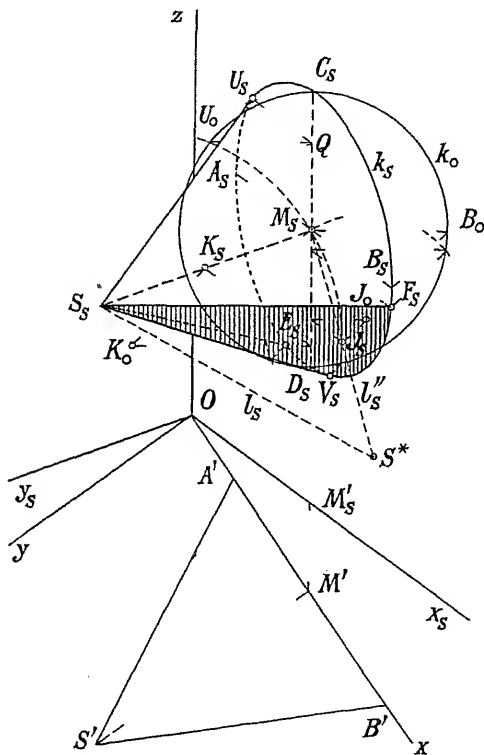


Fig. 35.

auf der Bildebene errichteten Normalen parallel zu  $z$  und, wie wir annehmen wollen, in halber natürlicher Größe abbilden.  $S'A'B'$  sei der Grundriß des Kegels in orthogonaler Projektion (Fig. 35); der Mittelpunkt  $M$  seines Basiskreises  $k$  mag durch  $M'$  und seine Höhe über der Grundrißebene gegeben sein. Dann liegen  $M_s$  und  $S_s$  senkrecht über  $M'$  und  $S'$  ( $M_s S_s \parallel y_s$ ), und  $k_s$  besitzt die konjugierten Durchmesser  $A_s B_s$  und  $C_s D_s$  ( $A_s B_s \parallel x_s$ ,  $C_s D_s \parallel z$ ,  $A_s A' \parallel z$ ). Die Tangenten von  $S_s$  an  $k_s$  sind die Umrißlinien des Kegels, sie berühren  $k_s$  in  $U_s$  und  $V_s$ . Zur Bestimmung dieser Punkte benutzen wir die Affinität zwischen  $k_s$  und

dem Kreis  $k_0$ , der mit ersterem den vertikalen Durchmesser  $C_s D_s$  gemein hat; in ihr sind  $B_s$  und  $B_0$  ( $M_s B_0 \perp C_s D_s$ ) affine Punkte. Von dem zu  $S_s$  affinen Punkt  $S_0$  gehen an den Kreis  $k_0$  zwei Tangenten mit den Berührungspunkten  $U_0$  und  $V_0$ ; die zu ihnen affinen Punkte  $U_s$  und  $V_s$  gehören alsdann dem Umriß an ( $U_0 Q \parallel B_0 M_s$ ,  $U_s Q \parallel B_s M_s$ ,  $U_0 U_s \parallel B_0 B_s$ ). Ist  $K_0$  der Mittelpunkt der Strecke  $S_0 M_s$ , so schneidet der Kreis mit dem Mittelpunkt  $K_0$ , der durch  $M_s$  geht, aus  $k_0$  die Punkte  $U_0$  und  $V_0$  aus ( $K_0$  affin zu  $K_s$ ,  $K_s S_s = K_s M_s$ ).

Legen wir durch die Kegelspitze einen Lichtstrahl  $l(l_s$  durch  $S_s$

und  $l_s''$  durch  $M_s$ , so wird er die Basisebene in  $S^*$  ( $S^* = l_s \times l_s''$ ), dem Schatten der Spitze, treffen. Die Tangenten aus  $S^*$  an  $k_s$  berühren in den Punkten  $E_s$  und  $F_s$ , die der Lichtgrenze angehören. Um diese Punkte zu ermitteln, verfährt man genau wie vorher, indem man  $M_s S^*$  in  $J_s$  halbiert und um den dazu affinen Punkt  $J_0$  einen Kreis mit dem Radius  $J_0 M_s$  beschreibt; dieser schneidet  $k_0$  in  $E_0$  und  $F_0$ , zu denen man rückwärts die affinen Punkte  $E_s$  und  $F_s$  sucht.

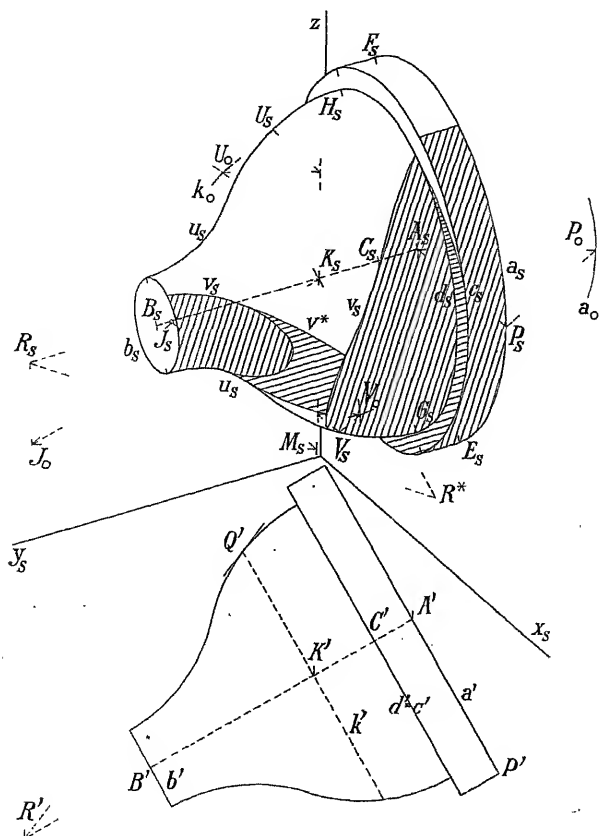


Fig. 36.

43. Umriß einer Rotationsfläche. Wir geben uns wieder den Grundriß und wenden alsdann das Kegelfverfahren an. Man bestimme zunächst das Bild der Rotationsachse  $AB$  ( $A_s B_s \parallel y_s$ ) und zeichne die Bilder der Kreise  $a, b, c, d$ ; es sind ähnliche Ellipsen  $a_s, b_s, c_s, d_s$  mit den Mittelpunkten  $A_s, B_s, C_s = D_s$  (Fig. 36). Dann

wähle man auf der Fläche einen beliebigen Parallelkreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $K$  aus und bestimme auf  $AB$  die Spitze  $R$  eines Kegels, der die Fläche längs  $k$  berührt ( $Q'R'$  tangiert den horizontalen Hauptmeridian in seinem Schnittpunkt mit  $k$ ). Legt man nun von  $R_s$  (auf  $A_sB_s$ ) die Tangenten an  $k_s$ , und sind  $U_s, V_s$  ihre Berührungspunkte, so berühren sie zugleich den gesuchten Umriß  $u_s$  in diesen Punkten. Nach 42 hat man aber nicht nötig  $k_s$  zu zeichnen; vielmehr schlägt man um  $K_s$  einen Kreis  $k_0$  mit dem Radius  $K'Q'$ , sucht zu dem Mittelpunkt  $J_s$  von  $R_sK_s$  den affinen Punkt  $J_0$ , beschreibt um  $J_0$  einen Kreis mit dem Radius  $J_0K_s$  und bestimmt zu den Schnittpunkten  $U_0, V_0$  beider Kreise rückwärts die affinen Punkte  $U_s, V_s$ .

Die hier auftretende Affinität ist für alle Parallelkreise ganz gleichartig:  $k_s$  und  $k_0$  haben den vertikalen Durchmesser als Affinitätsachse gemein, dem zu  $x_s$  parallelen Durchmesser von  $k_s$  entspricht der horizontale Durchmesser von  $k_0$  (in der Figur ist zu  $a_s$  der affine Kreis  $a_0$ , zu  $A_sP_s$  der affine Radius  $A_sP_0$  gezeichnet,  $J_sM_s \parallel A_sP_s$ ,  $M_sJ_0 \parallel A_sP_0$ ,  $J_0J_s \parallel P_0P_s$  usw.). Ist die Konstruktion für einen anderen Parallelkreis  $n$  zu wiederholen und ist  $S$  die Spitze des über ihm stehenden Berührungskegels, so hat man nur durch  $N_s$  eine Parallele zu  $K_sJ_0$  und durch  $S_s$  eine Parallele zu  $R_sJ_0$  zu ziehen, dann um ihren Schnittpunkt einen Kreis durch  $N_s$  zu beschreiben und zuletzt seine Schnittpunkte mit  $n_0$  noch durch Affinität zu übertragen. Insbesondere gehören die Umrißpunkte auf den Ellipsen  $a_s, b_s, c_s, d_s$  den zur Richtung  $A_sB_s$  konjugierten Durchmessern an; ihre Richtung ist affin zu der Richtung, die auf  $J_0K_s$  senkrecht steht.

In gleicher Weise wie die Punkte des Umrisses sind die Punkte der Lichtgrenze  $v_s$  auf den einzelnen Parallelkreisen bestimmt, wobei  $l_s = R_sR^*$  und  $l_s'' = K_sR^*$  angenommen ist, so daß  $K_sR^*$  den Schatten der Rotationsachse auf die Ebene des Parallelkreises  $k$  darstellt. Die Lichtgrenze  $v_s$  berührt den Umriß  $u_s$  in zwei Punkten, in denen  $u_s$  eine zu  $l_s = R_sR^*$  parallele Tangente besitzt. Die Parallelkreise, welche die Lichtgrenze berühren, findet man durch die nämliche Überlegung wie in 33 die den Umriß oder die Lichtgrenze berührenden Parallelkreise bestimmt werden. In den Punkten von  $v_s$ , deren Tangenten zu  $l_s$  parallel sind, beginnt der Schlag Schatten  $v^*$ , den die Fläche auf sich selbst wirft. Zu seiner Konstruktion ist der Schatten  $v^*$  von  $v_s$  auf die  $xz$ -Ebene, sowie der Schatten einzelner Parallelkreise auf diese Ebene nötig.  $v_s$  und  $v_*$  kann man vorteilhaft mittels des orthogonalen Grundrisses erhalten, indem man in der früher für die Rotationsflächen gelehnten Methode zuerst ihre Grundrisse sucht.

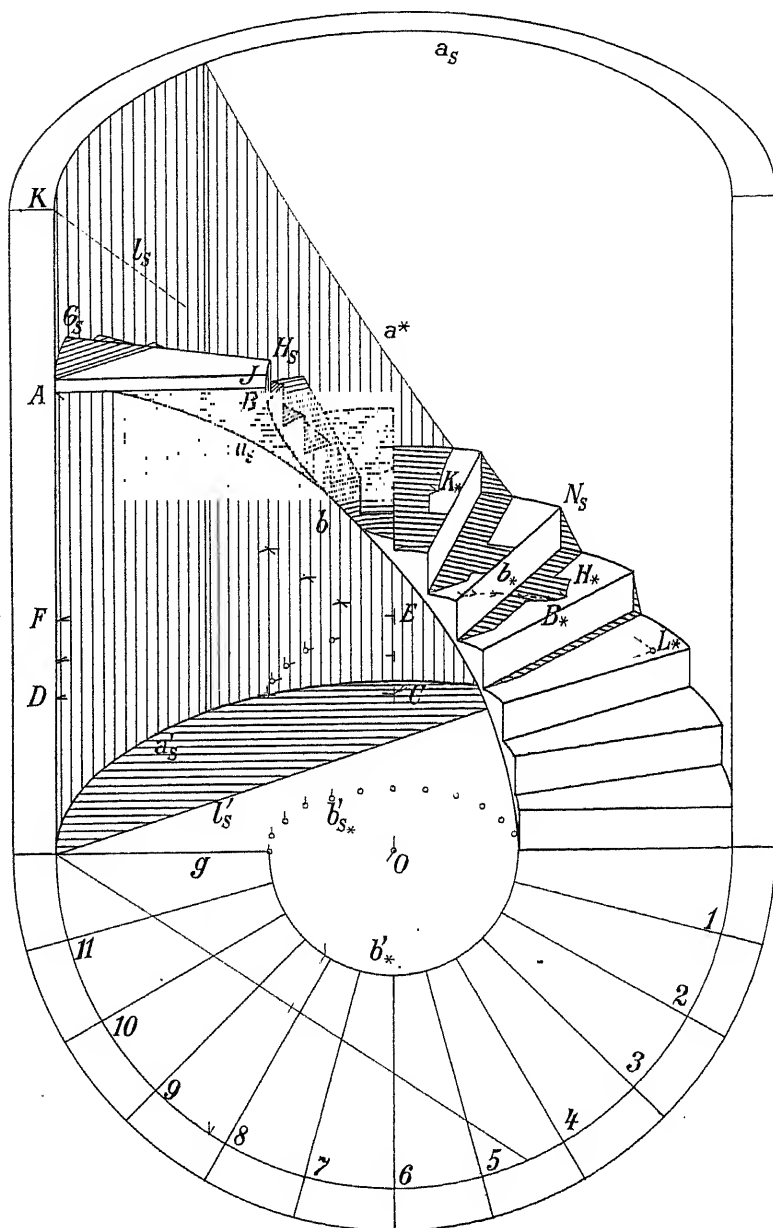


Fig. 37.



44. Anwendungsbeispiel. Freitragende Wendeltreppe. Gegeben ist der Grundriß und außerdem die Höhe  $h$  der Treppenstufen, deren zwölf auf einen halben Umgang kommen (Fig. 37). Bei der Konstruktion der schiefen Ansicht sind die Achsen, die hier keine Rolle spielen, weggelassen; auch hier wird die Annahme gemacht, daß die Normalen zur Bildebene vertikale Bilder von halber natürlicher Größe besitzen. Die Bildebene lassen wir mit der Ebene des Durchschnitts zusammenfallen und stellen den hinter der Bildebene liegenden Teil der Wendeltreppe dar; ihr Grundriß ist nach unten umgelegt. Zunächst sind die Punkte von  $a'$  und  $b'$  abgebildet, indem man von ihnen die Lote auf  $g$  fällt, und diese um die Hälfte verlängert. Die obere vordere und hintere Kante der ersten Stufe liegen um die Höhe  $h$  über ihren Grundrissen (die nicht eingezeichnet sind); die Bilder ihrer Endpunkte auf der zylinderförmigen Wand befinden sich senkrecht über den bzw. Grundrißbildern im Abstand  $h$ , die verlängerten Kanten treffen die Achse im Abstand  $h$  von  $O$ . Ebenso findet man die Bilder der Kanten aller übrigen Stufen, indem man die vertikalen Abstände ihrer Endpunkte von den Grundrißbildern und die ihrer Schnittpunkte mit der Achse gleich  $2h$ ,  $3h$  ... macht. Damit sind auch die vertikalen Kanten der Stufen bestimmt, während die Stufen nach innen und außen von horizontalen Kreisbogen begrenzt werden, deren Bilder zu den entsprechenden Bogenstücken von  $a'_s$  und  $b'_s$  kongruent sind. Die untere Fläche der Wendeltreppe ist eine Schraubenfläche mit horizontalen Erzeugenden, deren innere Randkurve  $b$  eine Schraubenlinie bildet. Sie ergibt sich als kongruente Kurve zur Schraubenlinie, welche die inneren Endpunkte der vorderen unteren Stufenkanten verbindet, und ist gegen diese etwas nach unten, um die Strecke  $d$ , verschoben. Den Umriß  $u_s$  dieser Schraubenfläche erhält man als Hüllkurve von einigen Erzeugenden, die aus den bez. vorderen unteren Stufenkanten durch eine vertikale Verschiebung um die Strecke  $d$  hervorgehen.

Die Lichtrichtung ist durch die Wahl von  $l_s$  und  $l'_s$  gegeben,  $L_*$  ist das Bild des ersten Spurpunktes von  $l$ . Die Lichtgrenze der zylinderförmigen Wandfläche und der Schlagschatten ihres oberen Randes  $a$  auf dieselbe ergibt sich in bekannter Weise aus dem Grundriß  $a'$  und bedarf keiner weiteren Erläuterung. Den Schatten der einzelnen Stufen auf die darunter liegende findet man mittels der inneren vertikalen Stufenkante, deren Schatten parallel zu  $l'_s$  wird; so gewinnt man den Schatten auf die dritte bis achte Stufe, soweit er von der darüber liegenden Stufe herrührt. Der Schatten  $a^*$

von  $a$  bricht sich an der sechsten Stufe und endigt in  $K^*$ ; die horizontale Fläche dieser Stufe schneidet die Achse in  $E$  und hat die Gerade  $EF$  zur Bildspur ( $EK_* \parallel l'_s$ ). Der von  $a$  herrührende Schatten auf die sechste Stufe ist zu dem betr. Bogenstück von  $a$  kongruent; die Schatten der Kante  $KF$  auf die sechste, siebente und achte Stufe sind zu  $l'_s$  parallel. Die oberste Stufe wirft ebenfalls Schatten auf die unteren Stufen. Die Fläche der vierten Stufe hat die Bildspur  $CD$ , in ihr sucht man die senkrecht unter  $J$  und  $H_s$  liegenden Punkte, worauf sich sofort die Schatten  $J_*$  und  $H_*$  ergeben; die Schatten von  $GH$  auf die vierte bis siebente Stufe folgen daraus unmittelbar, ebenso die Schatten von  $AB$  auf diese Stufen. Um sich zu überzeugen, daß nicht der obere Teil der Schraubenlinie  $b$  im Lichte liegt und darum auf die Stufen Schatten wirft, ist der Schatten  $b_*$  von  $b$  auf die vierte Stufe gezeichnet worden. Zu diesem Zweck sind einzelne Punkte von  $b$  auf die Fläche dieser Stufe gelotet und mit Hilfe der Lotpunkte ihre Schatten bestimmt worden. Zieht man aber durch  $B_*$  den Schatten  $B_*A_*$  ( $\parallel BA$ ), so erkennt man, daß  $b_*$  bereits innerhalb des Schattens der obersten Stufe zu liegen kommt. Daraus folgt zugleich, daß die Wendeltreppe nach unten begrenzende Schraubenfläche im Schatten liegt. Die innere zylindrische Leibung der Wendeltreppe empfängt ebenfalls noch Schatten von  $AB$ . Die Schatten der vorderen oberen Stufenkanten auf die zylindrische Wandfläche sind kleine Ellipsenbogen, deren Tangenten in den Endpunkten jener Kanten leicht zu finden sind. Zieht man nämlich durch einen solchen Punkt, z. B.  $N_s$ , die Mantellinie  $n$  des Zylinders und in ihren Endpunkten die Tangenten an  $\alpha'_s$  und  $\alpha_s$ , so stellen diese die Bilder der Spurlinien der längs  $n$  berührenden Ebene in der unteren und oberen Grenzfläche des Zylinders dar;  $L_*$  und  $K$  sind ebenso die Spurpunkte von  $l$ . Die Projektion von  $l$  auf die genannte Tangentialebene verbindet also die Fußpunkte der von den Spurpunkten von  $l$  auf jene Tangenten gefällten Lote; die Bilder dieser Lote sind parallel zu der Stufenkante durch  $N_s$ . Zu der erwähnten Projektion von  $l$  ist die Tangente an den Stufen-schall in  $N_s$  parallel.

Wäre die Lichtgrenze der unteren Schraubenfläche zu bestimmen, so würde man am besten mittels der reduzierten Ganghöhe nach 467 Bd. I die Konstruktion in dem orthogonalen Grundriß vornehmen und dann ihre auf den Grundrissen der einzelnen Mantellinien gefundenen Punkte senkrecht hinaufschneiden auf deren Bilder.

### Das Verfahren der orthogonalen axonometrischen Projektion.

45. Die darzustellende räumliche Figur denken wir uns mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem verbunden und auf seine drei Ebenen  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  durch senkrechte Projektion bezogen. Das Ganze, die Raumfigur mit dem Koordinatensystem, projizieren wir senkrecht auf die Bildebene  $\Pi$ , von der wir annehmen, daß sie keiner Koordinatenebene parallel sei. Welches die zweckmäßigste Lage des Koordinatensystems gegen das Objekt ist, entscheidet sich nach dessen geometrischen Eigenschaften. Man wird die Achsen den wichtigsten Linien des Objektes parallel legen und etwa vorhandene Symmetrieebenen als Koordinatenebenen benutzen<sup>6)</sup>.

Bezüglich der Bezeichnungen mag für unser gegenwärtiges Verfahren folgendes verabredet werden. Wir werden die Elemente der Originalfigur und ihre axonometrischen Bilder mit den gleichen Buchstaben benennen. Zur Unterscheidung beider aber setzen wir die Symbole, die das Original betreffen, in Klammern. Es bedeuten also z. B.  $P, P', P'', P'''$  die Bilder eines Punktes und seiner drei senkrechten Projektionen auf  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ ; der Originalpunkt heißt dagegen  $(P)$ . Ebenso sollen  $g, g', g'', g'''$  die Bilder einer Geraden und ihrer drei Risse, dagegen  $(g)$  die Gerade selbst bezeichnen, usw. Die von Punkten des Originals nach ihren Bildern führenden Strahlen nennen wir wieder Sehstrahlen.

46. Vom Ursprung  $(O)$  seien auf den Koordinatenachsen drei Strecken  $(OX), (OY), (OZ)$  von der gleichen Länge  $k$  abgetragen; sie bilden das Achsenkreuz und um dessen Abbildung handelt es sich zuerst. Die genannten Strecken sind drei Kanten eines Würfels und erscheinen im Bilde verkürzt mit den Längen

$$l = OX, \quad m = OY, \quad n = OZ.$$

Die Verhältnisse

$$\lambda = \frac{l}{k}, \quad \mu = \frac{m}{k}, \quad \nu = \frac{n}{k}$$

heißen die Verkürzungsverhältnisse und stellen für jede in der betreffenden Achsenrichtung gezogene Strecke das Verhältnis der Bildlänge zur wahren Länge dar. Sind  $\alpha, \beta, \gamma$  die Neigungswinkel der Koordinatenachsen gegen die Bildebene, also auch gegen ihre Projektionen, so hat man:

$$\lambda = \cos \alpha, \quad \mu = \cos \beta, \quad \nu = \cos \gamma.$$

Die Zahlen  $l, m, n$  heißen die Verhältniszahlen; nach 136 Bd. I erfüllen sie die Beziehung

$$l^2 + m^2 + n^2 = 2k^2,$$

woraus für die Verkürzungsverhältnisse

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2$$

folgt. — Die Spurpunkte  $A, B, C$  der Koordinatenachsen in der Bildebene bestimmen das Spurendreieck  $ABC$ ; seine Seiten sind die Spurlinien der Koordinatenebenen; die Bilder der Achsen verlaufen durch seine Ecken bzw. rechtwinklig zur gegenüberliegenden Seite und treffen sich im Bilde  $O$  des Ursprungs ( $O$ ).

47. Ist das Spurendreieck  $ABC$  gegeben (Fig. 38) und wird hinzugefügt, auf welcher Seite der Bildebene der Ursprung ( $O$ ) liegen soll, so ist die Lage des Koordinatensystems gegen die Bildebene bestimmt. Der Schnittpunkt  $O$  der Höhenlinien  $AA_1, BB_1, CC_1$  des Dreiecks  $ABC$  ist das Bild des Ursprungs; schneidet ferner  $CC_1$  den über dem Durchmesser  $AB$  konstruierten Kreis in  $O_0$ , so ist  $O_0$  eine Umlegung von ( $O$ ) in die Bildebene um  $AB$  ( $\angle A O_0 B = R$ ). Trifft die Parallele zu  $AB$  durch  $O$  den Kreis um  $C_1$  durch  $O_0$  in  $O^0$ , so ist  $O^0 O$  der Abstand des Ursprungs von der Bildebene. Um das Achsenkreuz abzubilden, trage man auf  $O_0 A, O_0 B, O^0 C$  die Strecken  $O_0 X_0, O_0 Y_0, O^0 Z^0$  gleich  $k$  auf und projiziere sie senkrecht, bzw. parallel zu  $AB$  auf  $OA, OB, OC$  in die Bildstrecken  $OX, OY, OZ$ . Statt jeder dieser Strecken kann auch eine ihr gleiche in entgegengesetzter Richtung von  $O$  aus gezogen werden. — Die Seiten des Spurendreiecks  $ABC$  liegen in denjenigen Quadranten der Koordinatenebenen, welche den die Strecke ( $O$ )  $O$  enthaltenden Oktanten des Raumes begrenzen. Der Schnittpunkt  $O$  seiner Höhenlinien liegt daher im Inneren des Dreiecks, und seine Winkel sind spitz.

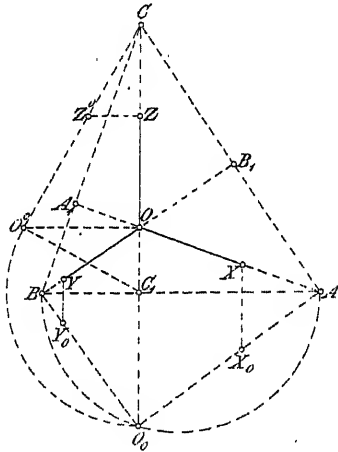


Fig. 38.

Sind die Richtungen  $OA, OB, OC$  der Achsenbilder gegeben, so ist das Spurendreieck der Form nach bestimmt. Zu seiner vollständigen Bestimmung, mithin auch zur Bestimmung der Lage des Koordinatensystems gegen die Bildebene, kann die Angabe des senkrechten

Abstandes ( $O$ )  $O$  des Ursprungs von der Bildebene dienen. Aber auch ohne die letztere Angabe können die drei Verkürzungsverhältnisse

$$\lambda = \frac{OX}{(OX)}, \mu = \frac{OY}{(OY)}, \nu = \frac{OZ}{(OZ)}$$

nach dem Vorigen konstruiert werden (vgl. auch 135 Bd. I).

48. Sind andererseits die Verhältniszahlen  $l, m, n$  und damit  $k$ , folglich auch die Verkürzungsverhältnisse  $\lambda, \mu, \nu$  gegeben, so kann man daraus die Abbildung des Achsenkreuzes konstruieren; der Punkt  $O$  und die Richtung eines Achsenbildes bleiben willkürlich. Die Konstruktion kann nach 136 Bd. I erfolgen. Man bestimmt nämlich zuerst  $k$  gemäß der Relation  $l^2 + m^2 + n^2 = 2k^2$ ,

indem man aus  $l$  und  $m$  als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse  $p$ , aus  $p$  und  $n$  als Katheten ein zweites mit der Hypotenuse  $q$ , und mit letzterer noch ein drittes gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck bildet, dessen Katheten die Länge  $k$  haben (Fig. 39). Die Wahl der Strecken  $l, m, n$  unterliegt, wegen der genannten Relation und weil jede einzelne von ihnen kleiner als  $k$  sein muß, einer Einschränkung: das Quadrat jeder einzelnen Strecke  $l, m, n$  muß kleiner sein als die Summe der Quadrate der beiden anderen. — Man denke sich ( $O$ ) in der Bildebene  $\Pi$  gelegen und zeichne die Strecke  $OZ$  (etwa vertikal) mit der vorgeschriebenen Länge  $n$ . Durch  $OZ$  werde eine zur Bildebene senkrechte Ebene  $E$  gelegt; sie enthält ( $OZ$ ). Ferner mögen die Strecken ( $OX$ ) und ( $OY$ ) um eine in  $O$  auf  $\Pi$

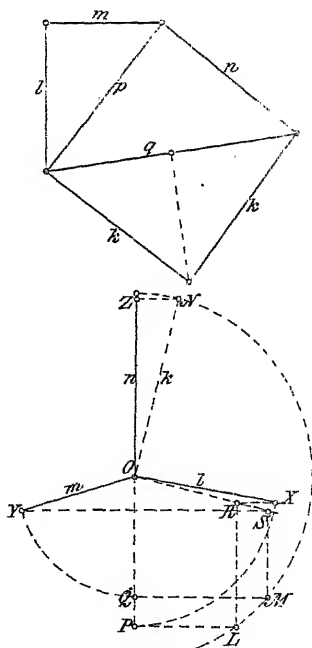


Fig. 39.

senkrechte Gerade in die Ebene  $E$  hereingedreht werden. Legt man dann  $E$  um  $OZ$  in  $\Pi$  um, so erscheinen die gedrehten Strecken ( $OX$ ) und ( $OY$ ), sowie ( $OZ$ ) in ihren wahren Länge  $k$ , nämlich als drei Radien  $OL, OM, ON$  eines Kreises, deren senkrechte Projektionen auf den Durchmesser  $OZ$  die Längen  $OP=l, OQ=m, OS=n$  haben. Projiziert man  $L$  und  $M$  parallel zu  $OZ$  auf den zu  $ON$  senkrechten Durchmesser in die Punkte  $R$  und  $S$ , so bilden diese nach der Wieder-

aufrihtung von  $E$  die senkrechten Projektionen von  $(X)$  und  $(Y)$  auf  $E$ . Die gesuchten Bilder  $X$  und  $Y$  müssen daher auf den Geraden liegen, die durch  $R$  und  $S$  senkrecht zu  $OZ$  gezogen sind, zugleich aber auf den Kreisen um  $O$  mit den Radien  $OP$  bzw.  $OQ$ . Hiernach sind sie konstruierbar. Man bemerkt, daß die Aufgabe, aus gegebenen Verhältniszahlen die Abbildung des Achsenkreuzes zu bestimmen, auch nach Annahme von  $OZ$  mehrere Lösungen zuläßt. Setzt man voraus, daß die Winkel  $XOY$ ,  $YOZ$ ,  $ZOX$  sämtlich stumpf seien, so existieren zwei zu  $OZ$  symmetrisch liegende Bilder des Achsenkreuzes; jedem derselben entsprechen zwei zu  $\Pi$  symmetrische Lagen des Achsenkreuzes, auch wenn der Ursprung in der Bildebene angenommen ist. Sodann kann jede Achsenrichtung in die entgegengesetzte verwandelt werden, endlich kann das Achsenkreuz zu sich selbst parallel in der Richtung senkrecht zu  $\Pi$  verschoben werden, ohne daß sich hierbei seine Abbildung oder die eines mit ihm verbundenen Objektes ändert.

49. Wird ein Gegenstand nach gegebenen Maßen gezeichnet, so empfiehlt es sich, Maßstäbe zu bilden, nach denen die Bildlängen der in den Achsenrichtungen verlaufenden Strecken leicht bestimmt werden können. Als natürlichen Maßstab bezeichnen wir den, der bei der Messung angewendet wurde. Als Maßstab des Bildes bezeichnen wir den, welcher zur Messung der in der Bildebene selbst gelegenen Figuren angewendet wird und dessen Einheiten die gleichbenannten Einheiten des natürlichen Maßstabes bedeuten (gleichviel ob man sich daß Objekt in seiner wahren Größe, oder verkleinert, oder vergrößert der Projektion unterworfen denkt).

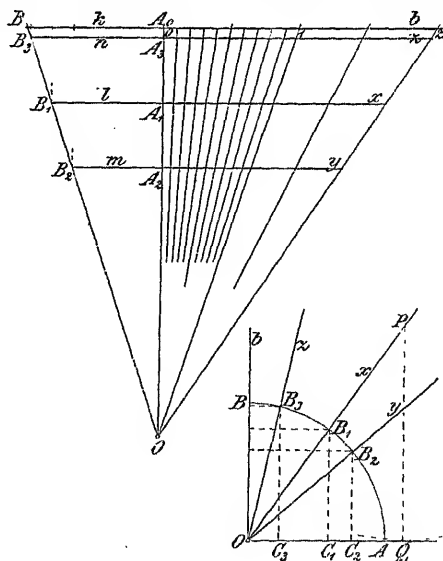


Fig. 40.

Aus dem Maßstab des Bildes leitet man die Verkürzungsmaßstäbe für die Achsen (oder kurz die Achsenmaßstäbe) ab, deren Einheiten die in der betreffenden Achsenrichtung am Objekte gemessenen Einheiten darstellen. Aus der Abbildung des Achsenkreuzes entnimmt man die Bildlängen  $l$ ,  $m$ ,  $n$  einer und derselben

auf den drei Achsen aufgetragenen Strecke  $k$  und zeichnet  $h, l, m, n$  als Parallelen zwischen den Schenkeln eines spitzen Winkels, etwa als  $AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$  zwischen den Schenkeln des  $\angle AOB$ . Trägt man dann von  $A$  aus auf der Geraden  $AB$  die Teile des Bildmaßstabes auf, so projizieren sich dieselben aus dem Zentrum  $O$  in die entsprechenden Teile der Achsenmaßstäbe für  $x, y, z$  (Fig. 40).

Ein anderes Verfahren zur Messung der Bildstrecken bedient sich eines sogenannten Sinusmaßstabes. Trägt man nämlich an die Linie  $OA$  die Winkel  $AOB_1, AOB_2, AOB_3$  an, deren Sinus

$$\frac{B_1C_1}{OB_1}, \quad \frac{B_2C_2}{OB_2}, \quad \frac{B_3C_3}{OB_3}$$

sich wie  $l:m:n$  verhalten, so kann man die Bildlänge einer zur Achse ( $x$ ), ( $y$ ) oder ( $z$ ) parallelen Strecke leicht bestimmen, indem man ihre Länge (im Maßstabe des Bildes) auf  $OB_1, OB_2$  oder  $OB_3$  von  $O$  aus aufträgt und von ihrem Endpunkt das Lot auf  $OA$  fällt, welches die gesuchte Bildlänge hat. Ist z. B.  $OP$  auf  $OB_1$  die wahre Länge einer in der ( $x$ )-Richtung laufenden Strecke, so ist  $PQ \perp OA$  die Länge ihres Bildes. Man hat nicht nötig,  $PQ$  wirklich zu ziehen, sondern findet  $PQ$  als Radius des um  $P$  gelegten und  $OA$  in  $Q$  berührenden Kreises durch Probieren mit dem Handzirkel.

50. Als Verhältniszahlen  $l, m, n$  nimmt man gern ganze Zahlen. Sind sie alle einander gleich, so heißt die Projektion isometrisch; sind zwei einander gleich, aber von der dritten verschieden, so heißt die Projektion dimetrisch (auch monodimetrisch); sind aber alle drei verschieden, so hat man eine trimetrische (oder anisometrische) Projektion. Die trimetrische ist den beiden anderen Projektionsarten vorzuziehen, weil bei jenen gelegentlich gewisse Symmetrieebenen eines Objektes sich als gerade Linien projizieren, nämlich Halbierungsebenen der Winkel des Koordinatensystems und zu ihnen parallele Ebenen. Denkt man sich eine Koordinatenachse ( $z$ ) vertikal, wie dies der gewöhnlichen Stellung der Objekte und des Beschauers entspricht, so ist es zweckmäßig die Richtung der Sehstrahlen so zu wählen, daß die nach oben, vorn bzw. rechts gekehrten Seiten der Koordinatenebenen  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  sichtbar werden. Die Bildebene  $\Pi$  legt man senkrecht zu den Sehstrahlen (am einfachsten durch den Ursprung ( $O$ )). Axonometrische Bilder, bei denen die  $z$ -Koordinaten (Höhen) und  $x$ -Koordinaten (Breiten) nur wenig, die  $y$ -Koordinaten (Tiefen) aber verhältnismäßig stärker verkürzt sind, wirken am anschaulichsten.

Um die Wirkung der verschiedenen Projektionsarten einigermaßen beurteilen zu können, sind in Fig. 41 Abbildungen eines

und desselben Würfels, bzw. eines und desselben regelmäßigen Oktaeders, dessen Achsen die Koordinatenachsen sind, zusammengestellt: *a)* in schiefer Projektion, *b)* in isometrischer, *c)* in dimetrischer, *d)* in trimetrischer orthogonaler Projektion. Der Anblick dieser Figuren lehrt bereits, daß die trimetrische orthogonale Projektion *d)* und demnächst die schiefe Projektion *a)* die anschaulichsten Bilder geben. Letztere ruft leichter den Eindruck der Verzerrung hervor, weil wir nicht gewöhnt sind, die Richtung unseres Blickes der schiefen

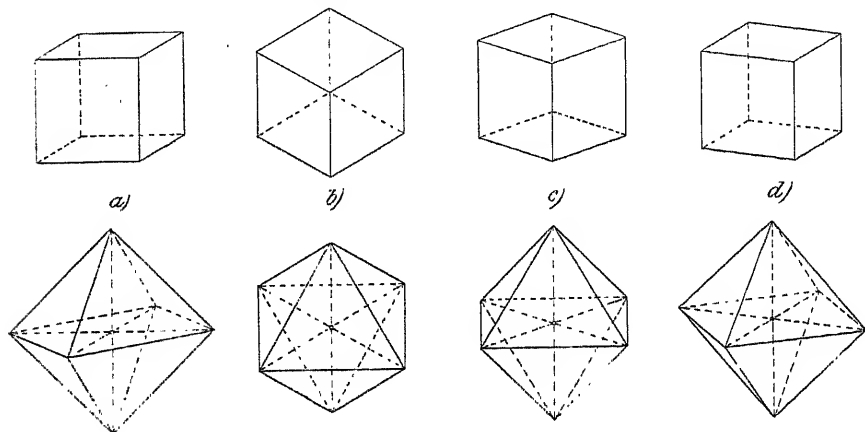


Fig. 41.

Projektion anzupassen. Den Grad der Verzerrung erkennt man am Bilde einer Kugel, deren scheinbarer Umriß bei der orthogonalen Projektion kreisförmig, bei der schiefen dagegen elliptisch ausfällt.

51. Im folgenden setzen wir überall die Abbildung des gleichschenkligen Achsenkreuzes, bzw. das Spurendreieck, als gegeben voraus.

Die Darstellung der Punkte, Geraden und Ebenen in axonometrischer Projektion vollzieht sich nach denselben Grundsätzen wie bei der schiefen Projektion (vgl. 11—14).

Ein Punkt ( $P$ ) wird durch sein Bild  $P$  und das Bild seiner senkrechten Projektion auf eine Koordinatenebene, z. B.  $P'$ , dargestellt. Ebenso wird eine Gerade ( $g$ ) durch ihr Bild  $g$  und das Bild  $g'$  ihres Grundrisses bestimmt. Zur Darstellung einer Ebene gehört die Angabe der Bilder zweier ihrer Spuren in den Koordinatenebenen. Über die vereinigte Lage von Punkten, Geraden, Ebenen, über ihre Verbindungs- und Schnittelemente und den Parallelismus ist nichts Neues zu sagen. Die hierauf bezüglichen Aufgaben werden analog den früheren gelöst. Dagegen be-



darf die Behandlung der Probleme, die sich auf die rechtwinklige Stellung von Geraden und Ebenen, auf die Bestimmung von Winkeln und Abständen und der wahren Gestalt ebener Figuren beziehen, noch einer kurzen Erörterung.

**52.** Zuerst ist die Aufgabe zu lösen: in einer Koordinatenebene aus einem gegebenen Punkte ( $P$ ) auf eine gegebene Gerade ( $g$ ) das Lot ( $l$ ) zu fallen (Fig. 42). Der Punkt ( $P$ ) und die Gerade ( $g$ ) sollen durch ihre Bilder gegeben sein; sie mögen beispielsweise in  $\Pi_1$  liegen.  $A, B, C$ , seien die Spurpunkte der

Achsen in der Bildebene (oder auch in einer zu ihr parallelen Ebene).

1. Lösung. Die Bildspur  $CD$  einer Ebene, die durch ( $z$ ) normal zu ( $g$ ) gelegt ist und ( $AB$ ) in ( $D$ ) schneidet, ist rechtwinklig zum Bilde  $g$  (67 Bd. I) und das Bild  $OD$  ihrer ersten Spur parallel zum Bilde des Lotes ( $l$ ). Man findet  $l$  als die Parallele zu  $OD$  durch  $P$ .

2. Lösung. Die Bildspur  $EF$  der ersten projizierenden Ebene ( $EFG$ ) von ( $g$ ) ist normal zum Bilde des Lotes ( $l$ ). Man findet  $l$  als

die Normale zu  $EF$  durch  $P$  ( $g \times AB = E$ ,  $g \times x = G$ ,  $GF \parallel z$ ,  $AC \times GF = F$ ). Statt der projizierenden Ebene ( $EFG$ ) kann man jede zu ihr parallele Ebene, z. B. die durch  $z$ , benutzen.

3. Lösung. Die Sehstrahlenebene durch ( $z$ ) schneide ( $g$ ) in ( $H$ ), wobei  $H = g \times z$ . Die Höhenlinien des Dreiecks ( $GHO$ ) in  $\Pi_1$  schneiden sich in einem Punkte ( $J$ ) und zwar ist  $GJ \perp z$ ,  $HJ \parallel y$ ;  $l$  geht parallel zu  $OJ$  durch  $P$ . Bei dieser Lösung werden nur die Achsenbilder, aber kein Spurendreieck gebraucht.

**53.** Um die wahre Länge einer Strecke ( $PQ$ ) zu finden, die durch  $PQ$  und  $P'Q'$  gegeben ist (Fig. 43), ziehe man  $OM \parallel Q'P'$  und  $MN \parallel PQ$ , so liegt ( $M$ ) in  $\Pi_1$ , ( $N$ ) auf ( $z$ ), und es ist  $(MN) \parallel (PQ)$ .

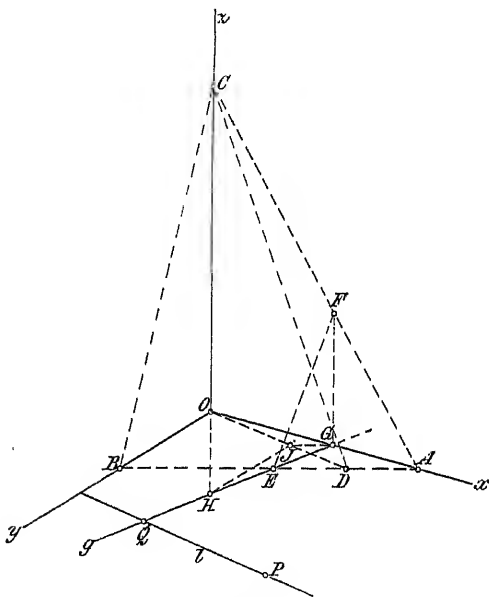


Fig. 42.

Das Spurendreieck  $ABC$  der durch  $M$  gelegten Bildebene  $\Pi$  in den Koordinatenebenen ist dadurch bestimmt, daß seine Seiten  $AB, BC, CA$  bzw. senkrecht zu  $z, x, y$  liegen und die erste  $AB$  durch  $M$  geht,  $MC$  ist die Bildspur der Ebene ( $MNO$ ); wir legen letztere um  $MC$  in die Bildebene um und erhalten die wahre Länge von  $(PQ)$  als Umlegung  $MN^0$  von  $MN$ . Die Umlegung  $O^0$  von  $O$  liegt auf der Senkrechten zu  $MC$  durch  $O$  und, da  $\angle(COM) = R$  ist, zugleich auf dem Kreise über dem Durchmesser  $CM$ ;  $N^0$  liegt auf  $CO^0$  und  $NN^0$  ist parallel zu  $OO^0$ . — Statt dieses Verfahrens kann man auch eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems anwenden. Man ziehe  $PR \parallel P'Q'$ , so daß  $(R)$  auf  $(QQ')$  liegt, und mache  $(R)$  zum Ursprung und  $(RQ)$  zur  $z$ -Achse des verschobenen Koordinatensystems. Die Umlegung von  $(PQ)$  in die durch  $(P)$  gedachte neue Bildebene vollzieht man genau ebenso wie vorhin.

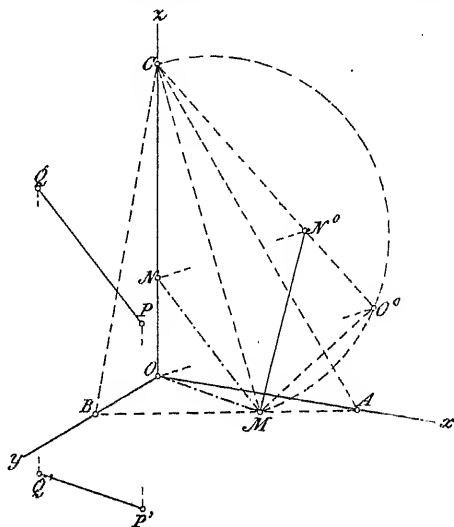


Fig. 43.

54. Das aus einem Punkte  $(P)$  auf eine Ebene  $E$  gefällte Lot  $(PQ)$  wird folgendermaßen dargestellt (Fig. 44). Sei  $ABC$  das Spurendreieck der Bildebene und  $(DEF)$  das Spurendreieck

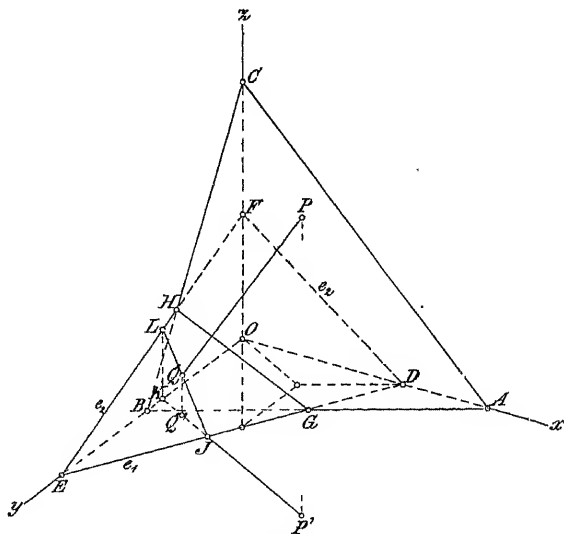


Fig. 44.

der Ebene  $E$ , also  $DE = e_1$ ,  $DF = e_2$ ,  $EF = e_3$ , so ist  $GH$  die Bildspur von  $E$  ( $G = AB \times DE$ ,  $H = BC \times EF$ ) und  $PQ$  liegt senkrecht zu  $GH$ . Ferner ist  $(P'Q') \perp (e_1)$ , also  $P'Q'$  nach 52 bestimmbar. Schneidet aber  $P'Q'$  das Spurbild  $e_1$  in  $J$  und  $y$  in  $K$ , und liegt  $L$  auf  $e_3$  so, daß  $KL \parallel z$ , so ist  $JL$  das Bild der Schnittlinie von  $E$  mit der ersten projizierenden Ebene von  $PQ$  und enthält  $Q$ .

55. Die Umlegung einer Ebene  $E$  um ihre Bildspur in die Bildebene (Fig. 45). Das Spurendreieck ( $DEF$ ) der Ebene  $E$

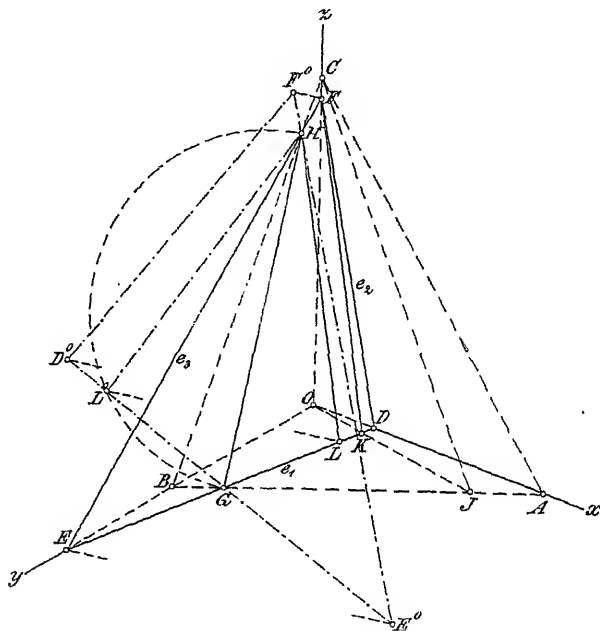


Fig. 45.

bestimmt mit dem Spurendreieck  $ABC$  der Bildebene die Spurlinie von  $E$  in  $\Pi$ , welche die Schnittpunkte der gleichnamigen Spurbilder, z. B.  $G = AB \times DE$ ,  $H = BC \times EF$  enthält. Die Bildspur  $CJ$  der normal zu  $(e_1)$  durch  $z$  gelegten Ebene ist rechtwinklig zu  $e_1$ , und diese Ebene ( $COJ$ ) schneidet aus  $E$  eine erste Falllinie ( $FK$ ) aus. Zieht man  $HL \parallel FK$ , so stellt  $\angle GLH$  einen in  $E$  gelegenen rechten Winkel dar; die Umlegung  $L^0$  von  $L$  in die Bildebene (um  $GH$ ) liegt daher auf einem über dem Durchmesser  $GH$  konstruierten Halbkreise und auf dem aus  $L$  auf  $GH$  gefällten Lote;  $GL^0 = e_1^0$  ist die Umlegung der Spurlinie ( $e_1$ ). Auf ihr bestimmt man die Umlegung  $F^0$  von  $(E)$  durch die Beziehung  $EF^0 \parallel LL^0$  und damit  $e_3^0$  als  $HE^0$ . —

Hiernach kann die wahre Gestalt ebener Figuren bestimmt werden, denn das Bild einer solchen ebenen Figur ist affin zu ihrer Umlegung in die Bildebene; die Bildspur der betreffenden Ebene ist die Affinitätsachse, das Bild irgend eines ihrer Punkte und seine Umlegung bestimmen einen Affinitätsstrahl ( $\parallel L L^0$ ).

56. Um den Winkel zweier Geraden zu bestimmen, stelle man ihre Parallelen ( $g$ ) und ( $h$ ) durch den Ursprung ( $O$ ) dar (Fig. 46), bestimme mit Hilfe des Spurendreiecks  $ABC$  ihre Spurpunkte in der Bildebene  $G$  und  $H$  und lege um ihre Verbindungslinie  $e = GH$  den Ursprung und damit den gesuchten Winkel  $\varphi = \angle GOH$  in die Bildebene um ( $J = g' \times AB$ ,  $G = g \times CJ$ ;  $K = h' \times AB$ ,  $H = h \times CK$ ). Die Linie  $e$  treffe die Seite  $BC$  des Spurendreiecks in  $L$  und ein über dem Durchmesser  $BC$  geschlagener Halbkreis die (zu  $BC$  normale) Linie  $x$  in  $O_0$ , so ist  $LO_0$  die Um-

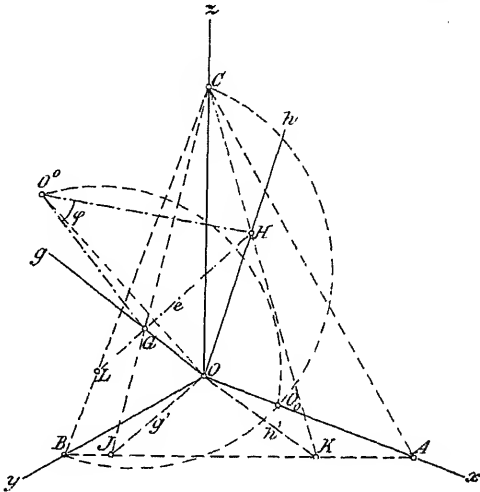


Fig. 46.

legung der Strecke ( $LO$ ) um  $BC$ . Zieht man aber  $OO^0$  normal zu  $e$  und macht  $LO^0 = LO_0$ , so ist  $O^0$  der um  $e$  umgelegte Ursprung und folglich  $\angle GO^0H = \varphi$  der gesuchte Winkel in wahrer Größe. Man kann  $O^0$  auch dadurch finden, daß man  $OO^0 \perp e$  zieht und ( $O^0 \rightarrow e$ ) gleich der Hypotenuse eines Dreiecks mit den Katheten ( $O \rightarrow e$ ) und  $O(O)$  macht.

57. Wir wenden die axonometrische Projektionsmethode zuerst auf die Zeichnung von Kristallformen des tesseralen Systems an. Die Kristalle dieses Systems besitzen ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Achsenkreuz. Die Lage einer Kristallfläche

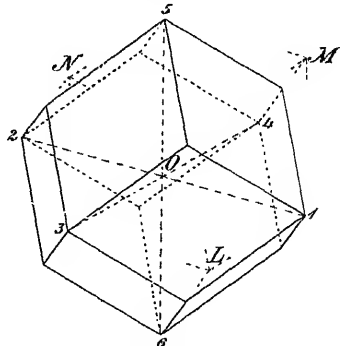


Fig. 47.

denkt man sich durch die Verhältnisse der Abschnitte bestimmt, die sie auf den drei Achsen hervorbringt (indem man diese Abschnitte

vom Ursprung  $O$  aus mißt). Bei einem Rhombendodekaëder z.B. (Fig. 47) gelten die Verhältnisse  $1:1:\infty$ , d. h. es schneidet jede Fläche zwei Achsen in gleicher Entfernung von  $O$  und die dritte Achse im Unendlichen. In den Koordinatenebenen laufen also die Spurlinien der (verlängerten) Seitenflächen parallel zu den Achsen (12), (34), (56) und in gleicher Entfernung von ihnen; sie schneiden sich paarweise in den Ecken dreier Quadrate, nämlich in  $(L)$ ,  $(M)$ ,  $(N)$  und den zu ihnen symmetrischen Punkten. Die Ecken jedes solchen Quadrates liefern, mit den beiden Endpunkten der zu ihm senkrechten Achse verbunden, je 8 der 24 Kanten des Rhombendodekaëders. Dieses kann daher mit großer Leichtigkeit gezeichnet werden, sobald nur das Achsenkreuz abgebildet ist. Die gezogenen Kanten treffen sich zu dreien in 8 Ecken, während sie in den 6 Endpunkten der Achsen zu vieren zusammenstoßen.

Es mag noch ein Vierundzwanzigflach (Trapezoëder) dargestellt werden, dessen Seitenflächen Achsenabschnitte machen, die

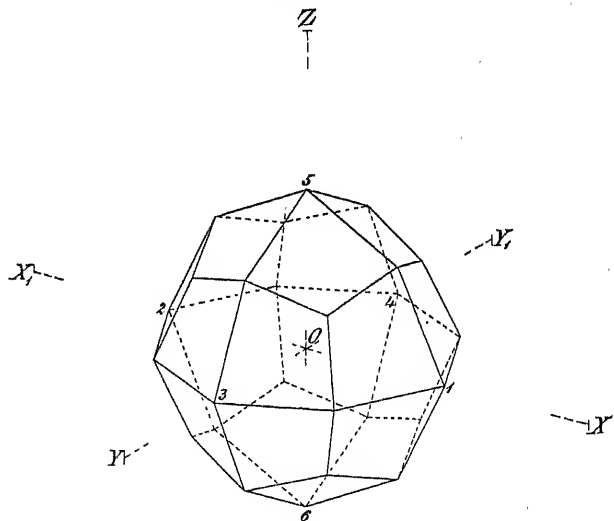


Fig. 48.

sich wie  $1:2:2$  verhalten (Fig. 48). Sind  $X, X_1, Y, Y_1, Z, Z_1$  die Bilder der Endpunkte des vollständigen Achsenkreuzes, so halbiere man die von  $O$  bis zu ihnen reichenden Strecken. Je zwei auf einer Achse liegende Halbierungspunkte sind mit den 4 Endpunkten der beiden anderen Achsen zu verbinden; man erhält so 24 Kanten des Trapezoëders. Außer den 6 auf den Achsen befindlichen Ecken hat man jetzt noch 12 weitere als Schnittpunkte je zweier Kanten;

es liegen nämlich in jeder Koordinatenebene 4, die wieder je mit den beiden Endpunkten der zu ihr senkrechten Achse zu verbinden sind. In den bisher aufgeführten 18 Ecken stoßen je 4 Kanten zusammen. Die zuletzt gezogenen 24 Kanten schneiden sich aber noch zu dreien in 8 neuen Ecken.

58. Darstellung einer Kugel in axonometrischer Projektion mit Eigen- und Schlagschattengrenzen (Fig. 49). Die Kugel berühre die Koordinatenebene  $\Pi_1$  im Ursprung ( $O$ ); durch ihr auf der  $z$ -Achse befindliches Zentrum  $C$  werde die Bildebene gelegt. Die Abbildung des Achsenkreuzes samt dem Spurendreieck

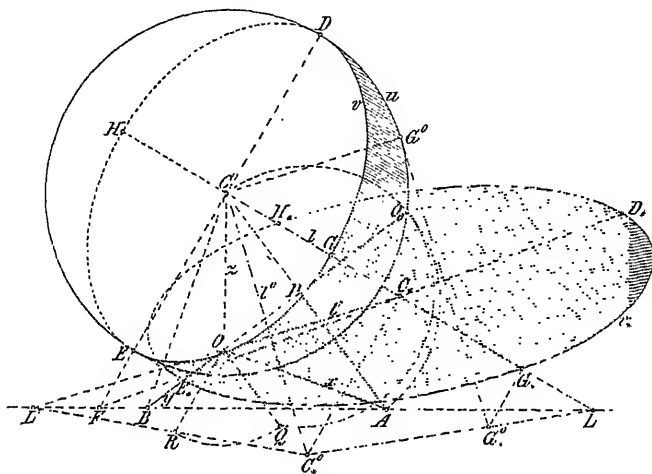


Fig. 49.

$ABC$  sei gegeben. Ist  $O_0$  die Umlegung von ( $O$ ) um  $AC$ , so bildet  $CO_0$  einen in der Bildebene liegenden Kugelradius und der um  $C$  durch  $O_0$  geschlagene Kreis  $u$  den (wahren und zugleich scheinbaren) Umriß der Kugel. — Bildet sich der Schatten von ( $C$ ) auf  $\Pi_1$  im Punkte  $C_*$  ab, so sind damit für den Lichtstrahl das Bild  $l = CC_*$  und das Grundrißbild  $l' = OC_*$  gegeben; es sei noch  $L = l \times AB$  und  $L' = l' \times AB$ . Die Lichtgrenze ( $v$ ) auf der Kugel ist derjenige Hauptkreis, dessen Ebene normal zum Lichtstrahl steht; sein in der Bildebene liegender Durchmesser  $DE$  ist daher senkrecht zu  $l$  zu ziehen.  $DE$  trifft  $\Pi_1$  in  $F$  auf  $AB$ ; folglich stellt  $D_*E_*$  auf  $FC_*$  den Grundrißschatten von  $DE$  dar, wenn  $DD_*$  und  $EE_*$  parallel zu  $l$  sind. Der zu  $DE$  senkrechte Durchmesser ( $GH$ ) von  $v$  liegt in der Sehstrahlebene durch  $l$  und zwar normal zu ( $l$ ); sein Bild  $GH$  und das seines Grundrißschattens  $G_*H_*$  liegen auf  $l$  selbst.  $DE$  und

$GH$  bilden die Achsen der Ellipse  $v$ ;  $D_*E_*$  und  $G_*H_*$  sind konjugierte Durchmesser der Ellipse  $v_*$ , d. i. des Bildes der Schlag-schattengrenze in  $\Pi_1$ . Um  $GH$  zu bestimmen, legt man die Sehstrahlenebene durch  $GH$  um  $l = CL$  in die Bildebene nieder; hierbei kommt  $C_*$  in die Lage  $C_*^0$ , wenn  $C_*C_*^0 = (C_* \dashv \Pi)$  und  $\perp l$  ist. Es besteht aber die Proportion:

$$(C_* \dashv \Pi):(O \dashv \Pi) = C_*L':OL',$$

denn  $L'$  ist die Bildspur der Geraden  $(l') = (OC_*)$ . Nun findet man  $(O \dashv \Pi)$  als die Kathete  $OQ$  des rechtwinkligen Dreiecks  $OPQ$  mit der Hypotenuse  $PQ (= PO_0)$ ; hierauf zeichnet man  $OR = OQ$  und  $C_*C_*^0$ , beide senkrecht zu  $l$ , und findet  $C_*^0$  auf  $L'R$ . Jetzt ist  $l^0 = CC_*^0$  der umgelegte Lichtstrahl und  $CG^0(\perp l_0)$  der umgelegte Radius  $(CG)$ ; zugleich ist  $C_*^0L$  die umgelegte erste Spur der Ebene und  $G_*^0$  der umgelegte erste Spurpunkt des Lichtstrahls durch  $G$  ( $G^0G_*^0 \parallel l^0$ ). Projiziert man jetzt  $G^0$  und  $G_*^0$  senkrecht auf  $l$ , so ergeben sich die gesuchten Punkte  $G$  und  $G_*$  und daraus  $H$  und  $H_*$ . Schließlich sind die Ellipsen  $v$  und  $v_*$  in bekannter Weise zu zeichnen.

59. Achsenbild  $Oxyz$  und Spurendreieck  $ABC$  seien wiederum gegeben. Auf der Grundrißebene  $\Pi_1$  ruht ein gerader Kreiszylinder  $\mathbb{C}$ ; er berührt  $\Pi_1$  längs der Mantellinie  $(OF)$ , die mit der  $x$ -Achse zusammenfällt; die eine seiner beiden ebenen Endflächen liegt in  $\Pi_3$ , die andere dazu parallel. Neben dem Zylinder steht auf der Seite des Beschauers ein gerader Kreiskegel  $\mathbb{K}$ ; sein Grundkreis in  $\Pi_1$  ist  $(k)$ ,  $(K)$  dessen Zentrum, und  $(S)$  die Kegelspitze. Zylinder und Kegel, sowie die Grenzen ihrer Eigen- und Schlagschatten sollen dargestellt werden (Fig. 50).

Es werde zuerst die Ebene  $\Pi_3$  um ihre Spur  $BC$  in die Bildebene umgelegt.  $O_0$  sei die Umlegung des Ursprungs ( $O_0$  auf der Verlängerung von  $x$ ,  $\angle BO_0C = R$ ). Das Zentrum  $M_0$  des mit  $\Pi_3$  umgelegten Endkreises  $m_0$  von  $\mathbb{C}$  liegt auf der umgelegten  $z$ -Achse  $O_0C$ ;  $N_0O_0$  und  $P_0Q_0$  seien rechtwinklige Durchmesser. Das Bild des genannten Endkreises ist eine zum umgelegten Kreise affine Ellipse;  $BC$  ist die Affinitätsachse,  $O_0$  und  $O$  sind affine Punkte und die Affinitätsstrahlen laufen parallel zu  $x(\perp BC)$ ; somit ist die große Achse der Ellipse parallel zu  $BC$  und gleich dem Kreisdurchmesser. Den genannten rechtwinkligen Durchmessern des Kreises entsprechen konjugierte Durchmesser der Ellipse, nämlich  $NO$  auf  $z$  und  $PQ \parallel y$ . Durch  $M_0$  ziehen wir  $a = MD$ , als Bild der Zylinderachse parallel zu  $x$ . Zu  $x$  parallel laufen auch die Umrißmantellinien des Zylinders, die in ihrer Verlängerung  $m_0$  berühren. Der andere Endkreis wird als eine zur vorigen kongruente Ellipse abgebildet;  $D$  ist ihr Mittel-

punkt;  $EF \nparallel NO$  und  $GH \nparallel PQ$  sind wieder konjugierte Durchmesser. Wir denken uns die Richtung des Lichtstrahles durch die seines Bildes und seines Grundrißbildes, also durch  $l$  und  $l'$ , gegeben und leiten daraus das Bild  $l'''$  des Seitenrisses ab. Geht  $l'''$  durch  $M$ ,  $l_0'''$  durch  $M_0$  und treffen sich beide auf  $BC$ , so ist  $l_0'''$  der umgelegte Seitenriß eines Lichtstrahles, der die Zylinderachse schneidet. Die zu  $l'''$  parallelen Tangenten des Kreises ( $NPOQ$ ) bilden die

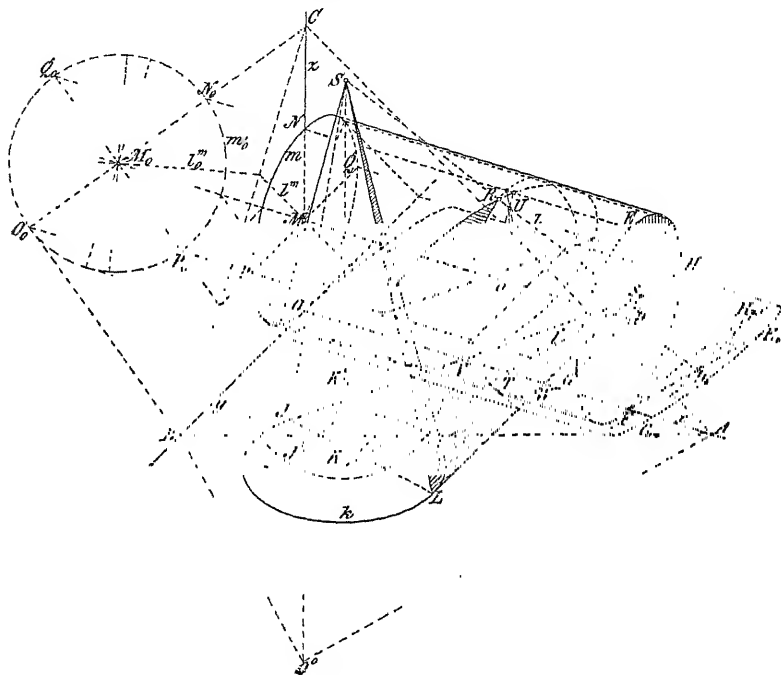


Fig. 50.

dritten Spuren der beiden Lichtstrahlebenen, die den Zylinder-  
 mantel berühren; ihre Berührungslinien bilden die Grenze seines  
 Eigenschattens und ihre ersten Spuren die seines Schlagschattens  
 auf  $\Pi_1$ . Die Bilder jener Mantellinien gehen verlängert durch die  
 beiden Punkte von  $m_0$ , deren Tangenten zu  $l_0'''$  parallel sind. Diese  
 beiden Tangenten treffen  $y_0 = B O_0$  in zwei Punkten, die auch auf den  
 verlängerten Schlagschattenlinien liegen. — Ist  $DD_* \parallel l$  und  $FD_* \parallel l'$ ,  
 ist ferner  $D_* E_* = FD_*$ , so ist  $FE_*$  der Schatten von  $FE$ , während  
 $GH$  einen dazu parallelen und gleichlangen Schatten  $G_* H_*$  liefert.  
 Der Schlagschatten des Endkreises besitzt alsdann die konjugierten  
 Durchmesser  $FE_*$  und  $G_* H_*$ .



Es werde zweitens die Ebene  $\Pi_1$  um  $AB$  in  $\Pi$  umgelegt;  $O^0$  sei die Umlegung des Ursprungs ( $O^0$  auf  $z$ ,  $\angle AO^0B = R$ ). Wir nehmen in der Umlegung den ersten Spurpunkt  $K^0$  der Kegelachse und seinen Grundkreis  $k^0$  an; ihre Bilder  $K$  und  $k$  sind dann hierzu affin;  $AB$  ist die Affinitätsachse,  $O^0$  und  $O$  affine Punkte. Die Ellipse  $k$  kann mit Hilfe ihrer Achsen gezeichnet werden, die parallel bzw. senkrecht zu  $AB$  liegen. Senkrecht über ihrem Zentrum  $K$  werde das Bild  $S$  der Kegelspitze gewählt. Entsprechen sich  $S^0$  und  $S$  durch die eben benutzte Affinität, so gilt das gleiche von den aus diesen Punkten an  $k^0$  und  $k$  gelegten Tangentenpaaren; letzteres bildet den scheinbaren Umriß des Kegelmantels. Sind  $SS_*$  und  $KS_*$  parallel zu  $l$  bzw.  $l'$ , so ist  $S_*$  das Bild des Grundrißschattens von  $S$ . Die Polare  $JL$  von  $S_*$  in bezug auf  $k$  wird leicht mit Hilfe des affinen Kreises  $k^0$  bestimmt. Die Geraden  $SJ$  und  $SL$  stellen dann die Grenze des Eigenschattens auf dem Kegel,  $S_*J$  und  $S_*L$  die Grenze seines Schlagschattens auf  $\Pi_1$  dar.

Der Kegel erzeugt Schlagschatten auf dem Zylinder. Die beiden Lichtebenen ( $SJS_*$ ) und ( $SLS_*$ ) schneiden nämlich den Zylindermantel in zwei Ellipsen. Der Schlagschatten wird von Stücken derselben begrenzt, die in dem gemeinsamen Punkte ( $R$ ) auf ( $SS_*$ ) beginnen und auf der sichtbaren Eigenschattengrenze des Zylinders endigen. Die Bilder der Grundrißschatten der Mantellinien durch ( $E$ )( $F$ )( $G$ )( $H$ ) und der Achse ( $a$ ) schneiden die Schatten  $JS_*$  und  $KS_*$  in Punkten, denen auf den Bildern der Mantellinien und der Achse selbst die Endpunkte je eines Paares konjugierter Durchmesser sowie der Mittelpunkte beider Bildellipsen entsprechen. Zwei dieser Durchmesser liegen in der Ebene durch ( $z$ ), ihre Bilder schneiden sich in  $U(T = x \times KS_*, TU \parallel z, U$  auf  $SS_*)$ ; die beiden andern befinden sich in einer Parallelebene zu  $\Pi_1$ , ihre Bilder sind daher parallel zu  $JS_*$  und  $LS_*$ . Der Punkt ( $R$ ) gehört der Mantellinie an, deren Schattenbild auf  $\Pi_1$  durch  $S_*$  geht. Man ziehe also durch  $S_*$  eine Parallele zu  $x$ , durch ihren Schnittpunkt mit  $y$  eine Parallele zu  $l'''$ , durch deren Schnittpunkt mit dem Ellipsenbogen  $NP$  wieder eine Parallele zu  $x$ ; letztere trifft  $SS_*$  in  $R$ . Legt man noch an den Bogen  $NP$  in dem eben genannten Schnittpunkt die Tangente  $t$  und durch  $t \times y$  eine Parallele zu  $x$ , so liefert sie auf  $S_*J$  und  $S_*L$  die Spurpunkte der beiden Tangenten, die in  $R$  das Bild des Kegelschattens auf dem Zylinder berühren.

## ZWEITES KAPITEL.

### Freie Perspektive.

#### Perspektive Darstellung von Ebene, Gerade und Punkt.

60. Zur perspektiven Darstellung oder Zentralprojektion eines räumlichen Gegenstandes bedarf man eines festen Punktes, des Augpunktes, und einer festen Ebene, der Bildebene, deren Lage zum Gegenstand gegeben ist. Indem man vom Augpunkte nach allen Punkten des Objektes Strahlen zieht, erhält man in ihren Schnittpunkten mit der Bildebene die Bilder dieser Punkte; die Gesamtheit dieser Bildpunkte macht das Bild des Objektes aus. Es ist sofort ersichtlich, daß hierbei jedem Raumpunkt ein bestimmter Bildpunkt zukommt, daß aber jeder Punkt der Bildebene noch unendlich vielen Punkten des Raumes als Bild zugehört, nämlich allen Punkten des Strahles, der den Punkt der Bildebene mit dem Augpunkte verbindet. Ein Raumpunkt ist somit durch sein perspektives Bild noch nicht bestimmt. Wir werden weiterhin sehen, wie seine räumliche Lage fixiert werden kann?).

Die Lage des Augpunktes oder des Zentrums der Perspektive gegen die Bildebene wird in der folgenden Weise bestimmt. Vom Augpunkte, der stets mit  $O$  bezeichnet werden soll, fälle man ein Lot auf die Bildebene; sein Fußpunkt  $A$  heißt der Hauptpunkt, seine Länge  $OA$  die Distanz. Sind Hauptpunkt sowie Größe und Richtung der Distanz bekannt, so kennt man auch die Lage des Augpunktes auf der einen oder anderen Seite der Bildebene. Um  $A$  als Mittelpunkt zieht man einen Kreis, den Distanzkreis  $d$ , dessen Radius gleich der Distanz ist.

Die Lage des Objektes gegen die Bildebene ist für die Gestalt des Bildes von wesentlicher Bedeutung. Wird Auge und Objekt festgehalten und nur die Lage der Bildebene geändert, so sind die betreffenden Bilder perspektive ebene Figuren (166 Bd. I). Verschiebt man die Bildebene parallel zu sich selbst, so erleidet die in ihr liegende Bildfigur eine ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung.

61. Die Bildebene teilt den Raum in zwei Teile, von denen der eine den Augpunkt enthält. Von diesem Teile wollen wir sagen,

er liege vor der Bildebene, während wir von dem anderen Teil sagen, daß er hinter der Bildebene liege. Die Lage der Bildebene wird fast immer so gewählt, daß das darzustellende Objekt hinter ihr gelegen ist. Wir haben im ganzen dreierlei Raumpunkte zu unterscheiden. Erstens: Punkte hinter der Bildebene; ihre Bilder liegen zwischen ihnen und dem Auge. Zweitens: Punkte vor der Bildebene, die ihr näher liegen als das Auge; ihre Bilder liegen vom Augpunkt in der gleichen Richtung wie sie selbst, aber in größerer Entfernung wie diese. Drittens: Punkte vor der Bildebene, deren Abstand von ihr größer ist als die Distanz; ihre Bilder liegen vom Augpunkt aus in der entgegengesetzten Richtung wie sie selbst, d. h. der Augpunkt trennt den Raumpunkt und sein Bild. In dem dritten Fall nennt man das Bild virtuell nach einer gebräuchlichen Bezeichnungsweise der Optik, da hier nicht der Sehstrahl aus dem Auge nach dem Raumpunkt, sondern seine Verlängerung rückwärts über das Auge hinaus die Bildebene trifft. In den beiden ersten Fällen heißt das Bild reell. Der Gegenstand, dessen Bild wir entwerfen wollen, muß natürlich eine derartige Lage zur Bildebene und zum Auge einnehmen, daß sein Bild reell wird. Trotzdem sind öfters auch virtuelle Bilder von Punkten, Geraden usw. zu konstruieren, die als Hilfselemente dienen; für die Konstruktion reeller und virtueller Bilder ergibt sich kein Unterschied.

Hinsichtlich der Bezeichnung mag noch vorausgeschickt werden, daß die Bilder eines Raumpunktes  $P$ , einer Raumgeraden  $g$  usw. durch Anhängen des Index  $c$  an die betreffenden Zeichen, also  $P_c$ ,  $g_c$  usw., gekennzeichnet werden sollen. Die Bildebene soll kurz durch  $\Pi$  bezeichnet werden.

**62. Darstellung einer Ebene.** Eine Ebene  $E$  im Raume legen wir fest, indem wir einerseits ihre Schnitt- oder Spurlinie  $e$  mit der Bildebene, andererseits ihre Stellung gegen diese angeben. Das letztere geschieht dadurch, daß wir durch das Auge  $O$  eine Parallelebene zu  $E$  legen und ihre Spurlinie  $e_\infty$  zeichnen (Fig. 51). Da jede Ebene durch  $O$  die Bildebene und die Ebene  $E$  in Geraden schneidet, von denen die eine das Bild der anderen ist, so ist jede Gerade in  $\Pi$  das Bild einer Geraden in  $E$ , und das Bild unserer Ebene überdeckt die ganze Bildebene. Speziell ist  $e_\infty$  das Bild der unendlich fernen Geraden von  $E$ , d. h. der Gesamtheit ihrer unendlich fernen Punkte, da  $Oe_\infty \parallel E$  ist;  $e_\infty$  heißt die Fluchtlinie von  $E$  (vgl. 157—160 Bd. I). Parallele Ebenen besitzen die gleiche Fluchtlinie. Die Spurlinie  $e$  und die Fluchtlinie  $e_\infty$  liegen

in der Bildebene  $\Pi$  und sind parallel; zu ihnen parallel ist auch die Verschwindungslinie  $e_\infty$  der Ebene  $E$ , deren Bild unendlich fern liegt, so daß  $Oe_\infty \parallel \Pi$  ist. Die Geraden  $e$  und  $e_v$  teilen  $E$  in drei Teile; der erste erstreckt sich von  $e$  bis ins Unendliche und liegt hinter der Bildebene, sein Bild in  $\Pi$  ist der Parallelstreifen zwischen  $e$  und  $e_\infty$ . Den zweiten Teil von  $E$  bildet der Streifen zwischen  $e$  und  $e_v$ , vor der Bildebene, sein Bild in  $\Pi$  dehnt sich von  $e$  bis ins Unendliche aus. Der dritte Teil von  $E$  liegt ebenfalls vor der Bildebene und erstreckt sich von  $e_v$  ins Unendliche, sein Bild ist virtuell und

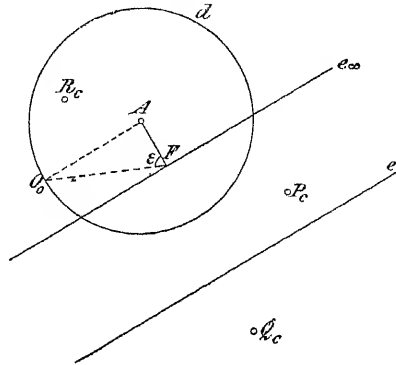


Fig. 51.

dehnt sich von  $e_\infty$  bis ins Unendliche aus. In Fig. 51 sind  $P_c, Q_c, R_c$  die Bilder von Punkten, die im ersten bzw. zweiten bzw. dritten Teile von  $E$  liegen.

Fällt man vom Hauptpunkt  $A$  ein Lot  $AF$  auf  $e_\infty$ , so ist  $OF$  eine Falllinie der Ebene  $Oe_\infty$  ( $OF \perp e_\infty$ ), und es ist  $\angle AFO = \varepsilon$  der Neigungswinkel der Ebene  $E$  gegen die Bildebene, da  $E \parallel Oe_\infty$  ist. Man zeichnet den Winkel  $\varepsilon$  durch Umlegen des Dreieckes  $AFO$  um die Kathete  $AF$  in  $\Pi$  als  $\triangle AFO_0$  ( $AO_0 \perp AF$ ,  $O_0$  auf  $d$ ). Es ist sofort ersichtlich, daß  $\varepsilon \leq 45^\circ$  ist, je nachdem  $e_\infty$  den Distanzkreis  $d$  schneidet, berührt oder nicht trifft. Geht die Fluchtlinie einer Ebene durch den Hauptpunkt  $A$ , so ist die Ebene zur Bildebene normal.

Die zur Bildebene parallelen Ebenen können in der angegebenen Weise nicht bestimmt werden, sie besitzen weder erreichbare Spur- noch Fluchtlinien. Punkte und Linien in solchen Ebenen lassen sich durch Hilfsgeraden oder Hilfsebenen festlegen, wie wir weiterhin sehen werden.

Bei Ebenen durch das Auge  $O$  fallen Spur- und Fluchtlinie zusammen; die ganze Ebene projiziert sich als gerade Linie.

**63. Darstellung einer Geraden.** Eine Gerade  $g$  legen wir im Raume fest, indem wir einerseits ihren Schnitt- oder Spurpunkt  $G$  mit der Bildebene, andererseits ihre Richtung angeben. Das letztere geschieht in der Weise, daß wir durch das Auge  $O$  eine Parallele zu  $g$  legen und ihren Spurpunkt  $G_\infty$  zeichnen (Fig. 52). Jeder Strahl durch  $O$ , der  $g$  in einem Punkte trifft, schneidet  $\Pi$  in dem

zugehörigen Bildpunkte. Speziell ist  $G_\infty$  das Bild des unendlich fernen Punktes von  $g$ , da  $OG_\infty \parallel g$  ist;  $G_\infty$  heißt der Fluchtpunkt von  $g$ .  $G G_\infty = g_e$  ist das Bild von  $g$  ( $g_e = Og \times \Pi$ ). Parallele Geraden besitzen den gleichen Fluchtpunkt.

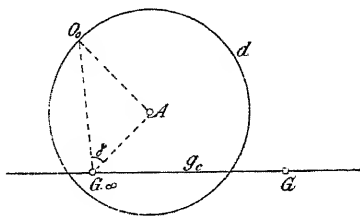


Fig. 52.

Wir betrachten außer dem Spurpunkt  $G$  und dem Fluchtpunkt  $G_\infty$  der Bildgeraden  $g_e$  noch den Verschwindungspunkt  $G_v$  auf  $g$ , dessen Bild ins Unendliche fällt ( $OG_v \parallel G_\infty G$ ). Das Stück der Geraden hinter der Bildebene

(mit dem Endpunkt  $G$ ) hat die Strecke  $G_\infty G$  zum Bilde. Die Strecke  $G G_v$  hat ein Bild, das sich von  $G$  ins Unendliche erstreckt.

Der Teil von  $g$ , der über  $G_v$  hinaus liegt, hat ein virtuelles Bild, nämlich das Stück von  $g_v$ , das sich von  $G_\infty$  ins Unendliche zieht.

Der Neigungswinkel von  $g$  gegen die Bildebene ist  $\gamma = \angle AG_\infty O$ ; er ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke  $AG_\infty O_0$ , dessen Katheten bekannt sind ( $O_0 A \perp AG_\infty$ ,  $O_0$  auf  $d$ ). Je nachdem  $G_\infty$  außerhalb, auf oder innerhalb  $d$  liegt, ist  $\gamma \gtrless 45^\circ$ . Alle Normalen zur Bildebene haben den Hauptpunkt  $A$  zum Fluchtpunkt.

Die zur Bildebene parallelen Geraden liefern Bilder, die zu ihnen selbst parallel sind; auf diesen Bildgeraden gibt es jedoch weder Spur- noch Fluchtpunkt. Eine solche Gerade kann also nicht in der vorher geschilderten Weise festgelegt werden, vielmehr muß man entweder einen Punkt auf ihr oder eine Ebene durch sie angeben. Bei Geraden durch das Auge  $O$  fallen Spur- und Fluchtpunkt zusammen, sie projizieren sich als Punkte.

**64.** Liegt eine Gerade  $g$  in einer Ebene  $E$ , so liegen Spur-, Flucht- und Verschwindungspunkt der Geraden bezüglich auf Spur-, Flucht- und Verschwindungslinie der Ebene ( $G$  auf  $e$ ,  $G_\infty$  auf  $e_\infty$ ,  $G_v$  auf  $e_v$ ). Dies folgt unmittelbar aus der Definition der genannten Elemente. Natürlich gehört auch umgekehrt eine Gerade einer Ebene an, wenn ihr Spur- und Fluchtpunkt bezüglich auf der Spur- und Fluchtlinie der Ebene liegen. Ist eine Gerade zu einer Ebene parallel, so liegt ihr Fluchtpunkt auf der Fluchtlinie der Ebene.

**65.** Eine Ebene  $E$  soll in die Bildebene umgelegt werden (Fig. 53). Ist  $\mathfrak{F}$  eine Figur in  $E$  und  $\mathfrak{F}_e$  ihr Bild, so bleibt nach 163 Bd. I die perspektive Beziehung zwischen ihnen erhalten, wenn man  $\mathfrak{F}$  mit der Ebene  $E$  um die Spur  $e$  dreht. Legt man eine

Man kann das vorstehende Resultat auch in die folgende Form kleiden. Jeder Punkt der Ebene  $E$  befindet sich nach seiner um die Spur  $e$  ausgeführten Umlegung in die Bildebene in gerader Linie mit seinem Bilde und dem um die Fluchtlinie  $e_\infty$  umgelegten Auge. Jede Gerade der Ebene  $E$  ist nach ihrer Umlegung um die Spur  $e$  parallel zu der Geraden, die ihren Fluchtpunkt mit dem um die Fluchtlinie  $e_\infty$  umgelegten Auge verbindet. So ist  $g^0 \parallel G_\infty O^0$ , denn die Parallelen  $g$  und  $G_\infty O$  werden um die Parallelen  $e$  bzw.  $e_\infty$  gedreht.

Die Falllinien der Ebene  $E$  haben Bilder mit dem Fluchtpunkte  $F_\infty$ ; denn sie stehen auf  $e$  senkrecht, für ihren Fluchtpunkt  $F_\infty$  gilt also die Beziehung  $OF_\infty \perp e_\infty$ . Die Hauptlinien von  $E$  besitzen Bilder, die zu  $e$  parallel sind; denn da sie  $e$  nicht schneiden, können es auch ihre Bilder nicht tun. Sind  $f_c$  und  $h_c$  die Bilder einer Fall- und einer Hauptlinie und ist  $P_c = f_c \times h_c$ , so liegt  $P^0 = f^0 \times h^0$  mit  $P_c$  und  $O^0$  in gerader Linie ( $f^0 \perp e$ ,  $h^0 \parallel e$ ,  $f_c$  durch  $F_\infty$ ,  $h_c \parallel e$ ).

66. Bestimmung der wahren Gestalt eines Dreieckes durch Umlegen um die Spur seiner Ebene (Fig. 54). Sei  $P_e Q_e R_e$  das Bild des Dreieckes und seien  $e$  und  $e_\infty$  Spur- und Fluchtpunkte der Ebene  $PQR$ , so bestimme man zunächst die Spur- und Fluchtpunkte der Dreiecksseiten. Es sind  $A, A_\infty$  bzw.  $B, B_\infty$  bzw.  $C, C_\infty$  die Spur- und Fluchtpunkte von  $QR$  bzw.  $RP$  bzw.  $PQ$ , wenn



der Entfernung des Fluchtpunktes  $G_\infty$  vom Auge  $O$  ( $A O_1 \perp G_\infty A$ ,  $A O_1 = A O$ ,  $G_\infty O_1 = G_\infty O = G_\infty O^0$ ).

Das hier ausgesprochene allgemeine Resultat findet besonders in den folgenden beiden Weisen seine Verwendung. Liegt die Gerade  $g$  in der Ebene  $E$ , so bestimme man auf  $e_\infty$  einen der Punkte  $O^d$  oder  $O_d$ , für die  $G_\infty O^d = G_\infty O_d = G_\infty O = G_\infty O^0$  ist; aus jedem dieser beiden Punkte projiziert sich eine jede Bildstrecke  $P_c Q_c$  von  $g_c$  in wahrer Länge auf  $e$  ( $P_d Q_d = P Q = P^0 Q^0$ ). Der Punkt  $O^d$  bzw.  $O_d$  heißt Teilungspunkt von  $g_c$ , weil er dazu dienen kann, jede Bildstrecke auf  $g_c$  so zu teilen, daß die wahren Längen dieser Teile in einem vorgeschriebenen Verhältnisse stehen.

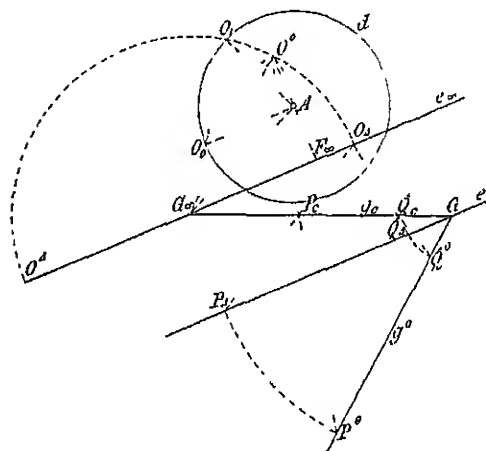


Fig. 55.

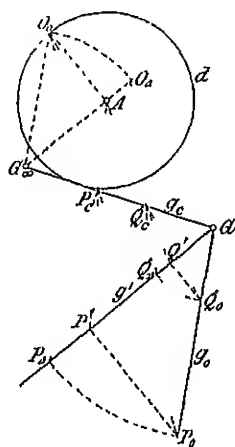


Fig. 56.

68. Legt man zweitens durch  $g$  eine Ebene senkrecht zur Bildebene, so ist  $G_\infty A$  ihre Fluchtlinie und  $g'$  ( $\parallel G_\infty A$  durch  $G$ ) ihre Spurlinie; dabei ist  $g'$  die Orthogonalprojektion von  $g$  auf die Bildebene (Fig. 56). Legt man jetzt das Auge um  $G_\infty A$  nach  $O_0$  um ( $O_0 A \perp G_\infty A$ ,  $O_0$  auf  $d$ ) und die Gerade  $g$  um ihre Orthogonalprojektion  $g'$  nach  $g_0$  ( $g_0 \parallel O_0 G_\infty$ ,  $g_0$  durch  $G$ ), so projiziert sich jede Bildstrecke  $P_c Q_c$  von  $g_c$  aus  $O_0$  in wahrer Größe auf  $g_0$ . Projiziert man  $P_c Q_c$  aus  $A$  auf  $g'$ , so erhält man die Orthogonalprojektion  $P' Q'$  von  $P Q$ ; denn die von  $P$  und  $Q$  auf die Bildebene gefällten Lote haben  $A$  zum Fluchtpunkte und ihre Spurpunkte  $P'$  und  $Q'$  liegen auf  $g'$ . Die Strecken  $P' P_0$  und  $Q' Q_0$  stehen auf  $g'$  senkrecht und geben die Abstände der Punkte  $P$  und  $Q$  von der Bildebene  $\Pi$  an. Trägt man  $G_\infty O_d = G_\infty O_0$  auf  $G_\infty A$  auf, so ist  $O_d$  der Teilungs-



punkt von  $g_c$  hinsichtlich der zu  $\Pi$  normalen Ebene durch  $g$ ;  $P_c Q$  projiziert sich also aus  $O_A$  in der wahren Länge  $P^A Q^A (= P_0 Q = P Q)$  auf  $g'$ .

69. Die hier gegebene Darstellung der Ebene und der Geraden und im Anschluß daran die des Punktes auf der Geraden oder in der Ebene kann dazu benutzt werden, eine Reihe von Aufgaben zu lösen. Aus dem Bilde  $P_c$  und der orthogonalen Projektion  $P'$  eines Punktes, wobei  $P_c P'$  durch den Hauptpunkt  $A$  gehen muß, ergibt sich sein Abstand von der Bildebene durch die Relation  $PP':OA = P'P_c:P_c A$ . Es folgt das unmittelbar aus Fig. 56 und wird noch einfacher durch Umlegen von  $OP$  um seine orthogonale Projektion  $AI$  erhalten. Aus dem Bilde  $g_c$  und der Projektion  $g'$  einer Geraden ergibt sich ihr Spurpunkt  $G = g_c \times g'$  und ihr Fluchtpunkt  $G_\infty = g_c \times G_\infty A$  wobei  $G_\infty A \parallel g'$  ist. Ist die Gerade  $g$  zur Bildebene parallel, so ist  $g_c \parallel g'$ ; ihr Abstand von der Bildebene ist gleich dem Abstand irgend eines Punktes  $P$  auf ihr, der sich wie vorher bestimmt ( $P'P_c$  durch  $A$ ).

Ein Punkt kann hiernach durch sein Bild und seine orthogonale Projektion, oder durch sein Bild und seinen Abstand von der Bildebene gegeben werden. Ebenso kann eine Parallel zur Bildebene durch ihr Bild und ihren Abstand, oder durch ihr Bild und ihre orthogonale Projektion bestimmt werden.

Aus Fig. 56 erkennt man weiter, daß sich der Abstand eines Punktes von der Bildebene zur Distanz auch wie die Abstände seines Bildes von Spur- und Fluchtpunkt einer durch ihn gelegten Geraden verhält ( $PP':OA = GP_c:P_c G_\infty$ ), oder wie die Abstände seines Bildes von Spur- und Fluchtlinie einer durch ihn gelegten Ebene. Ganz ebenso verhält sich der Abstand einer zur Bildebene parallelen Geraden zur Distanz, wie die Abstände ihres Bildes von Spur- und Fluchtlinie einer durch sie gelegten Ebene.

70. Die Schnittlinie  $s$  zweier Ebenen  $B$  und  $\Gamma$  hat den Spurpunkt  $S = b \times c$  und den Fluchtpunkt  $S_\infty = b_\infty \times c_\infty$ . Der Schnittpunkt  $S$  einer Geraden  $g$  und einer Ebene  $E$  wird erhalten, indem man durch  $g$  eine beliebige Hilfsebene  $\Delta$  legt, also ihre Spurlinie  $d$  durch  $G$  und ihre Fluchtlinie  $d_\infty$  ( $\parallel d$ ) durch  $G_\infty$  zieht und die Gerade  $i = E \times \Delta$  mit  $g$  schneidet ( $J = s \times d$ ,  $J_\infty = c_\infty \times d_\infty$ ,  $S = g_s \times i$ ). Ist  $g$  parallel zur Bildebene, so kann man eine zur Bildebene normale Hilfsebene durch sie legen; ihre Spurlinie ist  $g'$  ( $\parallel g_c$ ) und ihre zu  $g_c$  parallele Fluchtlinie geht durch  $A$ . Die einfachen Figuren zu diesen Aufgaben sind weggelassen, da die gleichen Konstruktionen in den weiteren Aufgaben wiederkehren.

71. Durch einen Punkt  $P$  zu der Geraden  $k$  eine Parallele  $l$  zu ziehen.  $P$  liege auf einer Geraden  $g$ , also  $P_c$  auf  $G G_\infty$ , dann ist  $L_\infty = K_\infty$ ,  $l_c = L_\infty P_c$  und  $LG \parallel L_\infty G_\infty$ ; denn  $LG$  und  $L_\infty G_\infty$  bilden Spur- und Fluchtlinie der Ebene  $lg$  (Fig. 57). Hieraus ergeben sich auch Spur- und Fluchtlinie der Ebene  $kP$ , die auch die Parallele  $l$  enthält, erstere ist  $KL$ , letztere ist hierzu parallel und geht durch  $K_\infty$ . Der Distanzkreis ist hier und weiterhin, wo er nicht gebraucht wird, weggelassen.

Durch einen Punkt  $P$  zu der Ebene  $E$  eine Parallelebene  $\Delta$  zu legen.  $P$  mag durch sein Bild  $P_c$  und seine ortho-

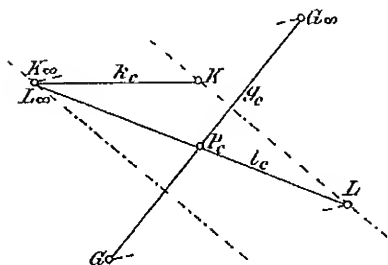


Fig. 57.

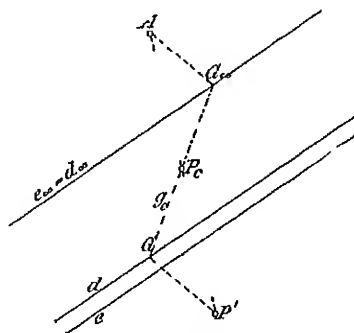


Fig. 58.

gonale Projektion  $P'$  gegeben sein ( $P_c P'$  durch  $A$ , Fig. 58). Ziehen wir durch  $P$  irgend eine Gerade  $g$  parallel zu  $E$  ( $g_c$  durch  $P_c$ ), so liegt ihr Fluchtpunkt  $G_\infty$  auf  $e_\infty$  und ihr Spurpunkt  $G$  auf einer Parallelen zu  $AG_\infty$  durch  $P'$ . Denn die Parallelen  $AG$  und  $P' G$  bilden Flucht- und Spurlinie einer Ebene durch die Geraden  $PP'$  und  $g$ . Die gesuchte Ebene  $\Delta$  enthält die Gerade  $g$ , besitzt also die Fluchtlinie  $d_\infty = e_\infty$  und eine dazu parallele Spurlinie  $d$  durch  $G$ .

72. Durch einen Punkt  $P$  eine Gerade  $s$  zu legen, die zwei Gerade  $k$  und  $l$  trifft (Fig. 59). Der Punkt sei wieder durch sein Bild  $P_c$  und seine Orthogonalprojektion  $P'$  gegeben ( $P_c P'$  geht durch  $A$ ). Wir legen durch  $P$  eine Parallele  $d$  zu  $k$ , dann ist  $D_\infty = K_\infty$  ihr Fluchtpunkt und  $d_c = D_\infty P_c$  ihr Bild; ihr Spurpunkt  $D$  liegt auf einer Parallelen zu  $K_\infty A$  durch  $P'$ . Denn  $PP'$  und  $d$  liegen in einer Ebene mit  $D_\infty A$  als Flucht- und  $DP'$  als Spurlinie. Ebenso ziehen wir durch  $P$  eine Parallele  $e$  zu  $l$ , dann ist  $L_\infty = E_\infty$  ihr Fluchtpunkt,  $e_c = E_\infty P_c$  ihr Bild und  $E = e_c \times P' E$  ( $\parallel L_\infty A$ ) ihr Spurpunkt. Die gesuchte Gerade  $s$  erscheint nun als Schnitt der Ebenen

$kd$  und  $le$ , also ist ihr Spurpunkt  $S = DK \times EL$ , während ihr Fluchtpunkt  $S_\infty$  auf den Geraden  $K_\infty S_\infty (\parallel KD)$  und  $L_\infty S_\infty (\parallel LE)$  liegt.

Soll man eine Gerade  $s$  zeichnen, die zwei Gerade  $k$  und  $l$  trifft und zu einer dritten, etwa  $g$ , parallel ist, so fällt  $S_\infty$  mit  $G_\infty$  zusammen und  $S$  ist der Schnittpunkt der Geraden  $KS (\parallel K_\infty G_\infty)$  und  $LS (\parallel L_\infty G_\infty)$ .

Von einer Geraden  $s = QR$  seien Spur- und Fluchtpunkt zu finden (Fig. 60). Die Punkte  $Q, R$  mögen zwei Ge-

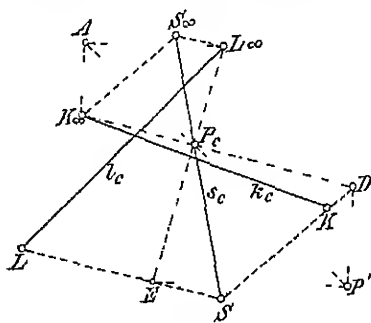


Fig. 59.

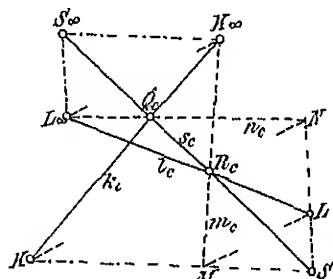


Fig. 60.

raden  $k$  bzw.  $l$  angehören und seien durch ihre Bilder  $Q_0$  und  $L_0$  auf den Bildgeraden  $k_0$  und  $l_0$  gegeben. Wir suchen nach 71 die Spur- und Fluchtlinien der Ebenen  $kR$  und  $lQ$ , indem wir durch  $Q_0$  eine zu  $k$  parallele Gerade  $m$  ( $M_\infty = K_\infty, ML \parallel M_\infty L_\infty$ ) und durch  $L_0$  eine zu  $l$  parallele Gerade  $n$  ( $N_\infty = L_\infty, NK \parallel N_\infty K_\infty$ ). Die Spurlinien von  $kR$  und  $lQ$  sind  $KM$  und  $LN$ , ihre Fluchtlinien gehen durch  $K_\infty$  bzw.  $L_\infty$ ; erstere schneiden sich im Spurpunkt  $S$ , letzter im Fluchtpunkt  $S_\infty$  der gesuchten Geraden  $s$ . Da wir  $s_0 = Q_0 k$  kennen, genügt es, Spur- und Fluchtlinie von einer der beiden Ebenen  $kR$  bzw.  $lQ$  zu konstruieren.

73. In einer Ebene  $E$  durch einen gegebenen Punkt  $P_0$  die beiden Geraden mit dem Neigungswinkel  $\gamma$  gegen die Bildebene zu zeichnen (Fig. 61). Die Fluchtpunkte aller Geraden mit der Neigung  $\gamma$  gegen die Bildebene  $\Pi$  liegen auf einer Kreise  $c$  mit dem Mittelpunkte  $A$ . Der Radius dieses Kreises ist die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, in dem die Distanz die zweite Kathete und  $\gamma$  den dieser gegenüberliegenden Winkel bildet. Die Schnittpunkte  $J_\infty$  und  $K_\infty$  von  $c$  und  $e_\infty$  sind die Fluchtpunkte der gesuchten Geraden  $j$  und  $k$ , ihre Spurpunkte  $J$  und  $K$  liegen auf  $e$ , und ihre Bilder  $JJ_\infty$  und  $KK_\infty$  gehen durch  $P_0$ .

Den Winkel  $\beta$  zweier Geraden  $k$  und  $l$  zu finden (Fig. 62). Da  $OK_\infty \parallel k$  und  $OL_\infty \parallel l$ , so ist  $\beta = \angle K_\infty OL_\infty$ ; die wahre Größe



Gerade der Ebene  $E$  bestimmt mit  $n$  eine Ebene, auf deren Spurlinie  $N$  liegt. Man wähle etwa die Falllinie durch  $P$ , deren Fluchtpunkt  $F_\infty$  ist und deren Bild durch  $P_c$  geht; dann liegt die Normale  $n$  in der Ebene mit der Fluchtlinie  $N_\infty F_\infty$  und einer dazu parallelen Spurlinie durch  $F$  und ihr Spurpunkt  $N$  auf dieser Spurlinie ( $NF \parallel N_\infty F_\infty \perp e_\infty$ ). Jetzt ist noch auf  $n_c$  ein Punkt  $Q_c$  zu finden, so daß  $PQ$  eine vorgeschriebene Länge besitzt. Man erreicht dieses durch Umlegen der Geraden  $n$  um ihre orthogonale Projektion  $n' = NF$  und erhält so  $n_0 \parallel O_0 N_\infty$  durch  $N$  und auf  $n_0$  den Punkt  $P_0 = n_0 \times O_0 P_c$ . Trägt man auf  $n_0$  die Strecke  $P_0 Q_0$  gleich der gegebenen Strecke  $PQ$  auf, so ist  $Q_c = N_c \times O_0 Q_0$ .

Man kann auch den Teilungspunkt  $O_A$  auf  $N_\infty F_\infty$  benutzen ( $N_\infty O_A = N_\infty O_0$ ) und von ihm aus  $P_c$  auf  $NF$  projizieren als  $P_A$  macht man  $P_A Q_A$  gleich der gegebenen Strecke, dann geht  $Q_A O_c$  durch  $Q_c$ . Nimmt man statt der Falllinie durch  $P$  eine beliebige Gerade  $g$  der Ebene  $E$  (also  $G G_\infty$  durch  $P_c$ ,  $G$  auf  $e$ ,  $G_\infty$  auf  $e_\infty$ ), so wird  $NG \parallel N_\infty G_\infty$ , und aus dem Teilungspunkte  $O_A$  auf  $N_\infty G_\infty$  ( $N_\infty O_A = N_\infty O_0$ ) projiziert sich  $P_c Q_c$  in wahrer Größe auf  $NG$  als  $P^A Q^A$ . Ist also  $P_c$  und die Länge der Normalen bekannt, so findet sich hiernach ihr Endpunkt  $Q_c$ . Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, daß bei den genannten Konstruktionen sich zwei Lösungen ergeben, wenn nicht angegeben ist, auf welcher Seite der Ebene die Normale liegen soll.

In einem Punkte  $P$  einer Geraden  $n$  die Normalebene  $E$  zu errichten (Fig. 63). Diese Aufgabe ist die Umkehrung der vorigen, und es folgt aus der vorausgehenden Behandlung unmittelbar die Konstruktion von  $E$ . Man ziehe  $N_\infty A$  und lege um diese Gerade das Auge  $O$  nach  $O_0$  um, dann findet man auf  $N_\infty A$  den Punkt  $F_\infty$  durch die Beziehung  $F_\infty O_0 \perp N_\infty O_0$ . Die Fluchtlinie  $e_\infty$  der gesuchten Ebene steht in  $F_\infty$  auf  $N_\infty A$  senkrecht, ihre Spurlinie  $e$  ergibt sich in folgender Weise. Ein beliebiger Punkt  $G_\infty$  auf  $e_\infty$  ist der Fluchtpunkt einer bestimmten Geraden  $g$  durch  $P$ , die offenbar auch der gesuchten Ebene angehört. Da auch  $g$  und  $n$  in einer Ebene liegen, so gewinnt man  $G$  aus der Relation  $NG \parallel N_\infty G_\infty$  ( $G = NG \times G_\infty P$ ) und damit  $e$  ( $\parallel e_\infty$ ) durch  $G$ .

Eine Gerade  $n$  steht somit auf einer Ebene  $E$  senkrecht wenn das vom Hauptpunkte  $A$  auf die Fluchtlinie  $e_\infty$  der Ebene gefällte Lot den Fluchtpunkt  $N_\infty$  der Geraden trägt und das Produkt der Abstände des Hauptpunktes vom Fluchtpunkt und Fluchtlinie gleich dem Quadrat der Distanz ist. Dabei muß  $A$  zwischen Fluchtpunkt und Fluchtlinie

liegen. Jede Gerade, deren Fluchtpunkt sich auf  $e_\infty$  befindet, ist zu  $n$  normal; jede Ebene, deren Fluchtlinie durch  $N_\infty$  geht, ist zu  $E$  normal.

75. Durch eine Gerade  $g$  eine Ebene  $B$  senkrecht zu einer gegebenen Ebene  $E$  zu legen (Fig. 64). Man bestimme wie vorher  $N_\infty$  ( $N_\infty A \perp e_\infty$ ,  $N_\infty A \times e_\infty = F_\infty$ ,  $N_\infty O_0 \perp O_0 F_\infty$ ), so ist  $N_\infty G_\infty = b_\infty$  die Fluchtlinie der gesuchten Ebene und die durch  $G$  gezogene Parallele  $b$

ihre Spurlinie. Die Schnittlinie  $s = B \times E$  ( $S = b \times e$ ,  $S_\infty = b_\infty \times e_\infty$ ) ist die orthogonale Projektion von  $g$  auf  $E$  und  $R = s \times g$  der Schnittpunkt von  $g$  und  $E$  ( $R_c = s_c \times g_c$ ). Fällt man von einem Punkte  $P$  der Geraden  $g$  auf  $E$  ein Lot, so liegt sein Fußpunkt  $Q$  auf  $s$  ( $P_c Q_c$  durch  $N_\infty$ ,  $Q_c$  auf  $S S_\infty$ ).

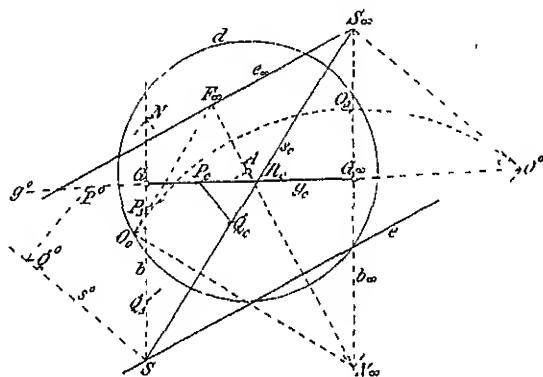


Fig. 64.

Durch Umlegen der Ebene  $B$  um ihre Spurlinie  $b$  gewinnt man einerseits den Winkel  $\alpha = \angle g E = \angle g s$  und andererseits die wahre Länge des Lotes  $PQ$ . Ist  $O^0$  das um  $b_\infty$  umgelegte Auge ( $O^0 A \perp b_\infty$ ,  $N_\infty O^0 = N_\infty O_0$ ), so ist  $\alpha = \angle G_\infty O^0 S_\infty$ . Zugleich ist  $P^0 Q^0$  die wahre Länge von  $PQ$ , wenn  $P^0 Q^0 \parallel O^0 N_\infty$  durch  $N$  geht ( $N = b \times P_c N_\infty$ ) und  $P^0, Q^0$  auf den Strahlen  $O^0 P_c, O^0 Q_c$  liegen. In der Figur sind auch  $g^0$  und  $s^0$  eingezeichnet ( $g^0 \parallel G_\infty O^0$ ,  $s^0 \parallel S_\infty O^0$ ). Die wahre Länge von  $PQ$  erhält man auch, wenn man die Strecke  $N_\infty O_0$  auf  $b_\infty$  als  $N_\infty O_d$  aufträgt und die Bildstrecke  $P_c Q_c$  von  $O_d$  auf  $b$  als  $P_d Q_d$  projiziert.

76. Gegeben eine Ebene  $E$  und eine Gerade  $g$ ; man soll in  $E$  die beiden Geraden suchen, die mit  $g$  einen bestimmten Winkel  $\beta$  einschließen (Fig. 65). Sind  $e, e_\infty$  und  $G, G_\infty$  bekannt, so bestimme man zunächst wie vorher den Fluchtpunkt  $N_\infty$  der Normalen von  $E$  ( $N_\infty A \perp e_\infty$ ,  $N_\infty A \times e_\infty = F_\infty$ ,  $N_\infty O_0 \perp O_0 F_\infty$ ). Die Fluchtpunkte  $K_\infty$  und  $L_\infty$  der gesuchten Geraden  $k$  und  $l$  müssen erstens auf  $e_\infty$  liegen und zweitens muß  $\angle K_\infty O G_\infty = \angle L_\infty O G_\infty = \beta$  sein. Betrachtet man aber das Dreikant mit den Kanten  $OK_\infty, OG_\infty$  und  $OM_\infty$ , wo  $M_\infty = e_\infty \times G_\infty N_\infty$  ist, so

sind seine letzten beiden Kanten bekannt, während man die erste Kante  $OK_\infty$  durch folgende Überlegung erhält. Die Seite  $M_\infty OG_\infty$  des

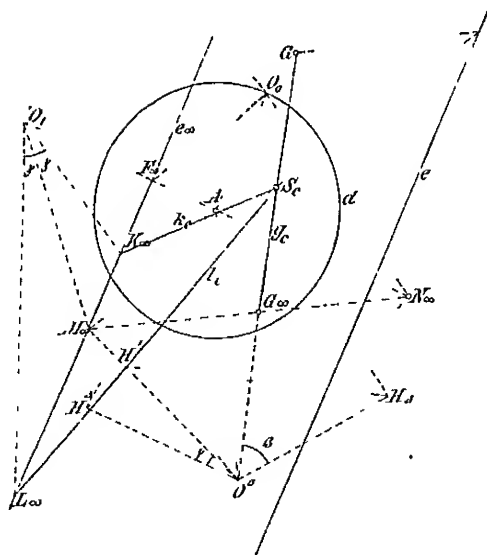


Fig. 65.

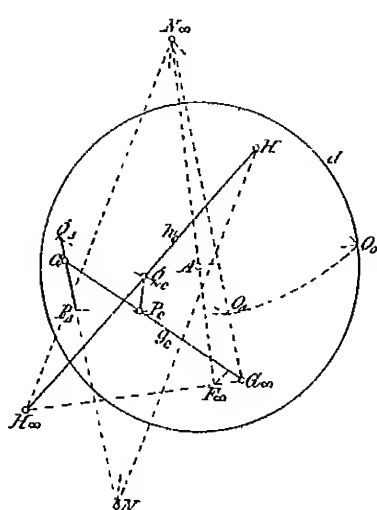


Fig. 66.

das Bild von  $S = g \times E$  (70), so sind  $S_c K_\infty$  und  $S_c L_\infty$  die Bilder der verlangten Geraden, deren Spurpunkte dann auf  $e$  liegen.

Die Seite  $M_\infty OK_\infty$  senkrecht, denn  $G_\infty M_\infty (\parallel E)$  geht durch  $N_\infty$ ; außerdem kennt man zwei Kantenwinkel oder Seiten desselben (vergl. 112 Bd. I), nämlich  $\angle K_\infty OG_\infty = \beta$  und  $\angle M_\infty OG_\infty = \angle M_\infty O^0 G_\infty$ , wenn  $O^0$  das um  $N_\infty G_\infty$  umgelegte Auge ist ( $O^0 A \perp N_\infty G_\infty$ ,  $N_\infty O^0 = N_\infty O_0$ ). Hieraus ergibt sich seine dritte Seite  $\gamma = \angle M_\infty OK_\infty$ , indem man zu dem genannten Dreikant ein kongruentes mit den Kanten

$O^0 M_\infty$ ,  $O^0 G_\infty$  und  $O^0 H$  zeichnet. Dazu trage man nach 117 Bd. I an  $O^0 G_\infty$  den Winkel  $G_\infty O^0 H_A = \beta$  an, wähle  $H_A$  in beliebigem Abstände von  $O^0$ , ziehe  $H_A H' \perp O^0 G_\infty$ , dann ist  $H'$  auf  $O^0 M_\infty$  die orthogonale Projektion von  $H$  und die Kanten  $O^0 M_\infty$  und  $O^0 H$  schließen den gesuchten  $\angle \gamma$  ein, so daß  $\gamma = \angle H' O^0 H_A$  ist ( $H_A H' \perp O^0 M_\infty$ ,  $H_A O^0 = H_A O^0$ ).

Legt man schließlich noch das Auge um  $e_\infty$  nach  $O_1$  um und zieht durch  $O_1$  die beiden Geraden, die mit  $O_1 M_\infty$  den  $\angle \gamma$  einschließen, so treffen sie  $e_\infty$  in den gesuchten Fluchtpunkten  $K_\infty$  und  $L_\infty$ . Ist  $S_c$

77. Die gemeinsame Normale zweier Geraden  $g$  und  $h$  zu finden (Fig. 66). Die Verbindungslinie  $G_\infty H_\infty$  der Fluchtpunkte beider Geraden ist die Fluchtlinie für alle Ebenen, die zu den beiden Geraden parallel laufen. Die gesuchte Gerade ist zu diesen Ebenen normal, ihr Fluchtpunkt  $N_\infty$  wird deshalb nach 74 aus der Fluchtlinie  $G_\infty H_\infty$  gefunden ( $N_\infty A \perp G_\infty H_\infty$ ,  $N_\infty A \times G_\infty H_\infty = F_\infty$ ,  $(A O)^2 = A F_\infty \cdot A N_\infty$ ). Die gemeinsame Normale  $n = PQ$  liegt einerseits mit  $g$ , andererseits mit  $h$  in einer Ebene, ihr Spurpunkt  $N$  liegt also auf den Geraden  $NG$  ( $\parallel N_\infty G_\infty$ ) und  $NH$  ( $\parallel N_\infty H_\infty$ ).  $NN_\infty = n$  schneidet  $g$  und  $h$  in den Punkten  $P$  und  $Q$ . Es soll noch die wahre Länge des Abstandes  $PQ$  der beiden Geraden gezeichnet werden. Nach 67 trage man  $N_\infty O = N_\infty O^0$  auf  $N_\infty G_\infty$  als  $N_\infty O_d$  auf, dann projiziert sich  $P_c Q_c$  aus  $O_d$  auf  $NG$  in seiner wahren Größe  $P_d Q_d$ .

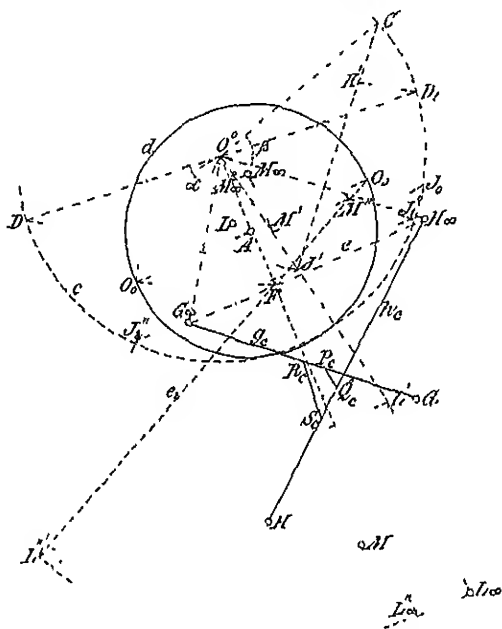


Fig. 67.

78. Die Geraden zu zeichnen, die mit einer gegebenen Geraden  $g$  einen bestimmten Winkel  $\alpha$  und mit einer gegebenen Geraden  $h$  einen bestimmten Winkel  $\beta$  einschließen (Fig. 67). Die Aufgabe wurde bereits in 108 Bd. I für orthogonale Projektion behandelt, hier soll nun die Konstruktion für Zentralprojektion durchgeführt werden. Ist  $l$  eine Gerade von der vorgeschriebenen Beschaffenheit, so gelten für die Fluchtpunkte der Geraden  $g, h, l$  die Beziehungen:  $\angle G_\infty O L_\infty = \alpha$  und  $\angle H_\infty O L_\infty = \beta$ . Die beiden Rotationskegel mit dem gemeinsamen Scheitel  $O$  und den Achsen  $OG_\infty$  bzw.  $OH_\infty$ , deren Mantellinien mit den zugehörigen Achsen den Winkel  $\alpha$  bzw.  $\beta$  einschließen, schneiden sich in vier Geraden (99 Bd. I), die zu den gesuchten Geraden parallel laufen und unter denen sich auch die Gerade  $OL_\infty$  befindet. Es kommt



also alles darauf an, die Schnittlinien dieser Kegel zu konstruieren. Zu diesem Zwecke drehen wir die Kegellachsen  $OG_\infty$  und  $OH_\infty$  und mit ihnen die Kegelflächen selbst um  $e = G_\infty H_\infty$ , bis das Auge  $O$  in die Bildebene nach  $O^0$  gelangt ( $O^0 A \perp e$ ,  $O^0 A \times e = F$ ,  $O^0 F' = O_0 F$ ,  $O_0 A \parallel e$ ,  $O_0$  auf  $d$ ), und bestimmen zunächst die gemeinsamen Geraden dieser gedrehten Kegelflächen nach 99 Bd. I. Ist  $\angle DO^0 G_\infty = \alpha$ , so ist  $DO^0$  eine in der Bildebene  $\Pi$  liegende Mantellinie des Kegels mit der Achse  $O^0 G_\infty$ ; ebenso ist  $O^0 C$  eine in  $\Pi$  liegende Mantellinie des Kegels mit der Achse  $O^0 H_\infty$ , wenn  $\angle CO^0 H_\infty = \beta$  ist. Um  $O^0$  als Mittelpunkt beschreiben wir eine Kugel, die  $\Pi$  in  $c$  und die Mantellinien  $O^0 D$  und  $O^0 C$  in  $D$ ,  $D_1$  bzw.  $C$ ,  $C_1$  schneiden mag. Diese Kugelfläche schneidet die Kegel in je zwei Kreisen, deren Ebenen zu  $O^0 G_\infty$  bzw.  $O^0 H_\infty$  normal sind; ihre senkrechten Projektionen werden von zwei zu  $O^0 G_\infty$  normalen Geraden durch  $D$  und  $D_1$  und von zwei zu  $O^0 H_\infty$  normalen Geraden durch  $C$  und  $C_1$  gebildet. Die beiden Kreise durch  $C$  bzw.  $D$  schneiden sich in zwei Punkten  $J_1$  und  $J_2$ , deren gemeinsame orthogonale Projektion auf  $\Pi$  der Punkt  $J'$  ist ( $CJ' \perp O^0 H_\infty$ ,  $DJ' \perp O^0 G_\infty$ ). Die Abstände der Punkte  $J_1$  und  $J_2$  von der Bildebene sind gleich  $J_0 J'$ , wenn  $J_0 J' \perp O^0 J'$  ist und  $J_0$  auf  $c$  liegt.  $O^0 J_1$  und  $O^0 J_2$  sind zwei gemeinsame Mantellinien der gedrehten Kegelflächen; sie besitzen noch zwei weitere  $O^0 K_1$  und  $O^0 K_2$ , deren gemeinsame orthogonale Projektion  $O^0 K'$  ist ( $CK' \perp O^0 H_\infty$ ,  $D_1 K' \perp O^0 G_\infty$ ), auf die wir jedoch nicht weiter eingehen wollen.

Wir legen jetzt durch  $e$  eine Ebene  $E$ , die zur Ebene  $Oe$  symmetrisch liegt in bezug auf die Bildebene; sie wird die Strahlen  $O^0 J_1$  und  $O^0 J_2$  in zwei Punkten  $L$  bzw.  $M$  schneiden. Führen wir nun um  $e$  eine der früheren entgegengesetzte Drehung aus, so daß  $O^0$  wieder nach  $O$  gelangt, dann nehmen die beiden Kegel wieder ihre ursprüngliche Lage an, während  $E$  mit der Bildebene zur Deckung kommt. Demnach gehen bei dieser neuen Drehung die Punkte  $L$  und  $M$  in zwei Punkte  $L_\infty$  und  $M_\infty$  der Bildebene über;  $OL_\infty$  und  $OM_\infty$  sind zu zweien der gesuchten Geraden parallel, d. h.  $L_\infty$  und  $M_\infty$  sind die Fluchtpunkte dieser Geraden. Um diese Punkte zu zeichnen, benutzen wir  $\Pi$  als Grundrißebene und eine dazu senkrechte Ebene durch  $O^0 AF$  als Aufrißebene; dann liegt  $O$  in der Aufrißebene, die wir um  $O^0 A$  so umlegen, daß  $O$  nach  $O_0$  gelangt. Nun ist  $J'$  die erste Projektion von  $J_1$  und  $J_2$  und es sind  $J_1''$  und  $J_2''$  ihre zweiten Projektionen ( $J' J_1'' J_2'' \perp O^0 A$ ,  $J_1'' J_2'' = 2 J' J_0$ ); zugleich ist  $e_2 = FO_0$  die zweite Spur der Ebene  $E$ , wenn  $O_0 O_0 A$  ein Durchmesser von  $d$  ist, denn es muß  $\angle O_0 A F O^0 = \angle O^0 F O_0$  sein. Hieraus



$O_0 O' = (A \rightarrow x)$ . Sind nun  $e_1, e_2$  die Spuren einer Ebene  $E$ , so ist  $e = e_2$  ihre Spur in der Bildebene und ihre Fluchtlinie  $e_\infty$  ( $\parallel e$ ) geht durch den Fluchtpunkt  $E_\infty$  von  $e_1$  ( $E_\infty$  auf  $a_\infty$   $E_\infty O_0 \parallel e_1$ ). Sind  $g', g''$  die Projektionen einer Geraden  $g$ , so fällt ihr Spurpunkt  $G$  in der Bildebene mit  $G_2$  zusammen, während ihr Fluchtpunkt  $G_\infty$  sich aus  $O G_\infty \parallel g$  ergibt ( $A G_\infty \parallel g', O' G_\infty' \parallel g' \parallel O_0 H, G_\infty' H G_\infty \perp x$ ). Aus den Projektionen  $P', P''$  eines Punktes  $P$  findet man sein Bild  $P_c$  als Spurpunkt der Geraden  $OP$  in der Bildebene; man errichtet also im Punkte  $O' P' \times x$  auf  $x$  eine Normale, diese schneidet  $A P''$  in  $P_c$ .

Das Bild  $g_c$  einer Geraden  $g$  wurde soeben durch Konstruktion ihres Spur- und Fluchtpunktes gewonnen; es läßt sich indes auch leicht der Schnittpunkt  $G_x$  des Bildes  $g_c$  mit der Geraden  $x$  angeben.  $G_x$  ist der Schnittpunkt von  $x$  mit der Ebene  $Og$ , die Parallelen  $g$  und  $O G_\infty$  treffen also  $\Pi_1$  in zwei Punkten  $G_1$  und  $U$ , deren Verbindungslinie  $x$  in  $G_x$  schneidet ( $O' U \parallel g', A G_\infty \times x = U'', U U'' \perp x$ ). Diese Konstruktion ist besonders von Bedeutung, wenn die Bilder von einer Anzahl paralleler Geraden gefunden werden sollen, deren Spurpunkte in  $\Pi_1$  bekannt sind. Man hat dann zunächst  $G_\infty$  und  $U$  zu suchen, darauf projiziert man die ersten Spurpunkte der einzelnen Geraden aus dem Punkte  $U$  auf  $x$  und verbindet diese Projektionen mit  $G_\infty$ , so sind diese Linien die gesuchten Bildgeraden.

80. Zweitens: Die Ebene  $\Pi_2$  schließt mit der Bildebene einen Winkel  $\alpha$  ein, die Ebene  $\Pi_1$  steht auf  $\Pi_2$  und der Bildebene senkrecht (Fig. 69). Es sei  $x$  wiederum die Schnittlinie der Projektionsebenen, ferner seien  $a$  und  $a_\infty$  ( $\parallel a$  durch  $A$ ) Spur- und Fluchtlinie von  $\Pi_1$ ,  $b$  ( $\perp a$ ) und  $b_\infty$  ( $\parallel b$ ) Spur- und Fluchtlinie von  $\Pi_2$ . Dann lege man  $\Pi_2$  um  $b$  und gleichzeitig das Auge um  $b_\infty$  nach  $O^0$  um; dabei mögen die umgelegten Punkte und Geraden von  $\Pi_2$  ebenso wie die Punkte und Geraden in  $\Pi_2$  selbst bezeichnet werden; eine Verwechslung wird sich bei der Darlegung leicht vermeiden lassen. Ferner lege man  $\Pi_1$  um  $a$  und gleichzeitig das Auge um  $a_\infty$  nach  $O_0$  um; auch hier sollen die umgelegten Punkte und Geraden in  $\Pi_1$  die gleiche Bezeichnung wie die Punkte und Geraden in  $\Pi_1$  selbst erhalten. In der Figur erscheint die  $x$ -Achse zweimal, nämlich um  $a$  umgelegt als  $x \parallel O_0 B_\infty$  und um  $b$  umgelegt als  $x \perp b$ . Nun zeichnet man noch  $O'$  und  $O''$ , die ebenfalls mit  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  in die Bildebene umgelegt sind ( $O' A \perp a, O_0 O' = (A \rightarrow a), B A B_\infty \perp b, B_\infty O_0 \parallel B O_0'' \perp O_0 O_0'', B O'' = B O_0''$ ), sowie den Fluchtpunkt  $Y_\infty$  aller zu  $\Pi_2$  normalen Geraden ( $O_0 Y_\infty \perp O_0 B_\infty$ ).

Sind  $P', P''$  die orthogonalen Projektionen eines Punktes  $P$ , so kann man ihre Bilder  $P'_c, P''_c$  in der früheren Weise konstruieren.

Natürlich sind die Projektionen  $P'$ ,  $P''$  so zu wählen, daß die Fußpunkte der von ihnen auf die  $x$ -Achse gefällten Lote von  $a \times b$  gleichweit abstehen, sich also decken, wenn die beiden Geraden  $x$  durch Drehung zur Deckung gebracht werden. Man ziehe durch  $P''$  und  $O^0$  irgend zwei Parallelen, schneide sie mit  $b$  bzw.  $b_\infty$  in  $R$  und  $S$ , dann trifft die Verbindungslinie  $RS$  die Gerade  $O^0 P''$  in  $P_c$ ; ähnlich ergibt sich  $P'_c$ . Da sich in  $P$  die in  $P'$  und  $P''$  auf  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  errichteten Normalen schneiden, so schneiden sich in  $P_c$  das von  $P'_c$  auf  $a$  gefällte Lot und die Gerade  $P'' Y_\infty$ .

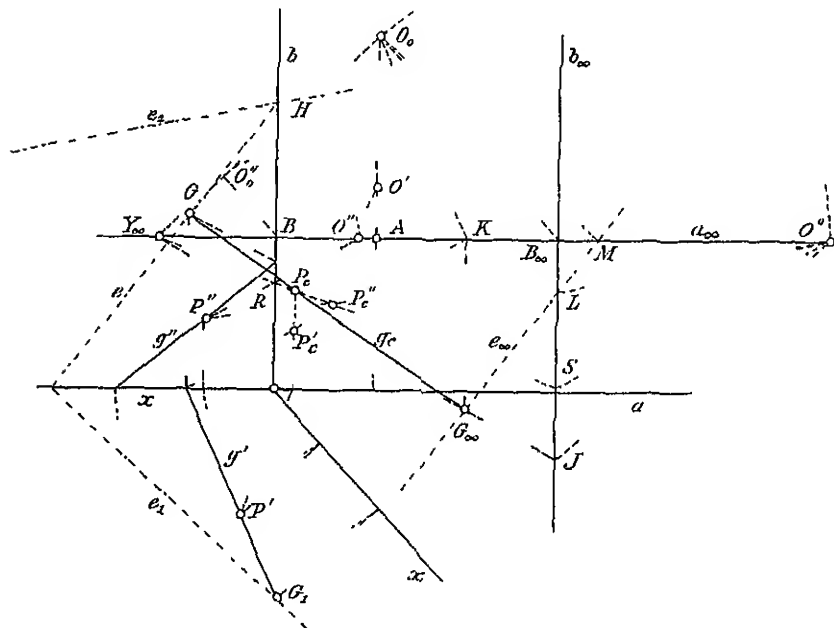


Fig. 69.

Die Konstruktion von  $P_c$  aus  $P'$  und  $P''$  läßt sich noch wesentlich einfacher gestalten, ohne vorher die Bilder dieser Projektionen zu zeichnen. Die Gerade  $PP'$  ist zu  $\Pi_1$  normal, ihr Bild steht in  $Q = a \times O' P'$  auf  $a$  senkrecht und trägt  $P_c$ . Die Gerade  $PP''$  ist zu  $\Pi_2$  normal, ihr Bild liegt in der Ebene  $O P P''$ . Diese schneidet  $\Pi_2$  in  $O'' P''$  und die Spurlinie  $b$  in  $R = b \times O'' P''$ ; demnach ist  $Y_\infty R$  das Bild von  $PP''$  und geht ebenfalls durch  $P_c$ . Die Konstruktion von  $P_c$  erfordert also nur das Ziehen der vier Geraden  $O' P'$ ,  $O'' P''$ ,  $Q P_c (\perp a)$  und  $Y_\infty R$ ; dabei kann an Stelle der Geraden  $O'' P''$  in  $\Pi_2$  die in die Bildebene umgelegte Gerade  $O'' P''$  treten, da es nur auf ihren Schnittpunkt  $R$  mit  $b$  ankommt.

Es kann vorkommen, daß  $Y_\infty$  auf  $b$  oder in der Nähe  $v$  liegt, dann wird die Gerade  $Y_\infty R$  — das Bild von  $PP''$  — ungenutzbar, und man benutzt besser ihren Schnittpunkt  $S$  mit  $b_\infty$ .  $S$  liegt auf der Ebene  $OPP''$ , diese schneidet die Ebene  $Ob_\infty$  in einer zu  $O$  parallelen Geraden durch  $O$ ; demnach ist  $O^0S$  zu der umgekehrten Geraden  $O''P''$  parallel.

Sind  $g', g''$  die orthogonalen Projektionen einer Geraden  $g$  auf zwei Ebenen, die in  $g'$  bzw.  $g''$  auf  $\Pi_1$  bzw.  $\Pi_2$  senkrecht stehen. Ist  $J$  der Fluchtpunkt der Geraden  $g''$  in  $\Pi_2$  ( $J$  auf  $b_\infty$ ,  $O^0J \parallel g''$ ), so besitzt die erste der genannten Ebenen eine Fluchtlinie  $JY_\infty$  und eine dazu parallele Spurlinie durch  $g'' \times b_\infty$ . Ebenso  $K$  der Fluchtpunkt der Geraden  $g'$  in  $\Pi_1$  ( $K$  auf  $a_\infty$ ,  $O_0K \parallel g'$ ), so gehen Spur- und Fluchtlinie der zweiten Ebene durch  $g'$  bzw.  $K$  und sind zu  $a$  normal. Die Spur- und Fluchtlinien beider Ebenen schneiden sich in dem Spurpunkt  $G$  bzw. Fluchtpunkt  $H$  der gesuchten Geraden  $g$ .

Kennt man von einer Ebene  $E$  die orthogonalen Spuren  $e_1$  und  $e_2$  (ihre Schnittpunkte mit den bez. Geraden  $a$  haben den gleichen Abstand von  $a \times b$ ), so geht ihre Fluchtlinie  $e_\infty$  durch die Fluchtpunkte  $L$  und  $M$  von  $e_2$  und  $e_1$  ( $L$  auf  $b_\infty$ ,  $O^0L \parallel e_2$ ,  $M$  auf  $a_\infty$ ,  $O_0M \parallel e_1$ ) und ihre Spurlinie  $e$  ( $\parallel e_\infty$ ) durch den Punkt  $H = e_2 \times b$ .

81. Drittens: Beide Projektionsebenen  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  sind gegen die Bildebene geneigt. Seien wiederum  $a, a_\infty$  bzw.  $b, b_\infty$  die Spur- und Fluchtlinien von  $\Pi_1$  bzw.  $\Pi_2$ , seien ferner  $X$  und  $Y$  die Spur- und Fluchtpunkte der Schnittpunkte  $x$  beider Ebenen, seien  $Z_\infty$  bzw.  $Y_\infty$  die Fluchtpunkte der Normalen von  $\Pi_2$  bzw.  $\Pi_1$  ( $Z_\infty$  auf  $b_\infty$ ,  $Y_\infty$  auf  $a_\infty$ ). Dann suche man zunächst die Projektionen  $O', O''$  des Auges und lege sie mit den Ebenen  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  in die Bildebene um. Aus den Projektionen  $P', P''$  eines Punktes finde man jetzt sein Bild, indem man  $a$  mit  $O'P'$  und  $b$  mit  $O''P''$  schneidet und diese Punkte mit  $Z_\infty$  bzw.  $Y_\infty$  verbindet; diese Geraden schneiden sich in dem gesuchten Bilde  $P_c$ . Man erkennt die Richtigkeit des Gesagten unmittelbar aus der voranstehenden Nummer.

Die Flucht- und Spurlinie einer Ebene  $E$  verbinden die Fluchtpunkte und Spurpunkte ihrer orthogonalen Spuren  $e_1$  und  $e_2$ . Der Fluchtpunkt einer Geraden  $g$  erscheint als Schnittpunkt zweier Geraden, von denen die eine den auf  $a_\infty$  liegenden Fluchtpunkt von  $g'$  mit  $Z_\infty$  verbindet, die andere den auf  $b_\infty$  liegenden Fluchtpunkt von  $g''$  mit  $Y_\infty$  verbindet.

82. Das schiefe Prisma und sein Normalschnitt (Fig. 10). Sei  $E(e, e_\infty)$  die Ebene des Grundpolygons  $BCD \dots$ , so legen das Auge um  $e_\infty$  nach  $O^0$  um und nehmen das Polygon in

Umlegung um  $e$  als  $B^0 C^0 D^0 \dots$  an; dann findet man nach 66 sein Bild  $B_e C_e D_e \dots$  ( $C^0 D^0 \times e = M$ ,  $O^0 M_\infty \parallel C^0 D^0$ ,  $M_\infty$  auf  $e_\infty$ ,  $MM_\infty = C_e D_e$ ,  $O^0 C^0$  durch  $C_e$ ). Ist nun  $BJ$  eine Prismenkante und ist ihre orthogonale Projektion  $BH$  auf die Grundebene  $E$  als  $B_0 H_0$ , sowie die Höhe  $JH$  des Prismas bekannt, so gewinnt man sein Bild nach 80. Man lege durch das Auge eine Ebene  $\Pi_1$  senkrecht zu  $e$ ,

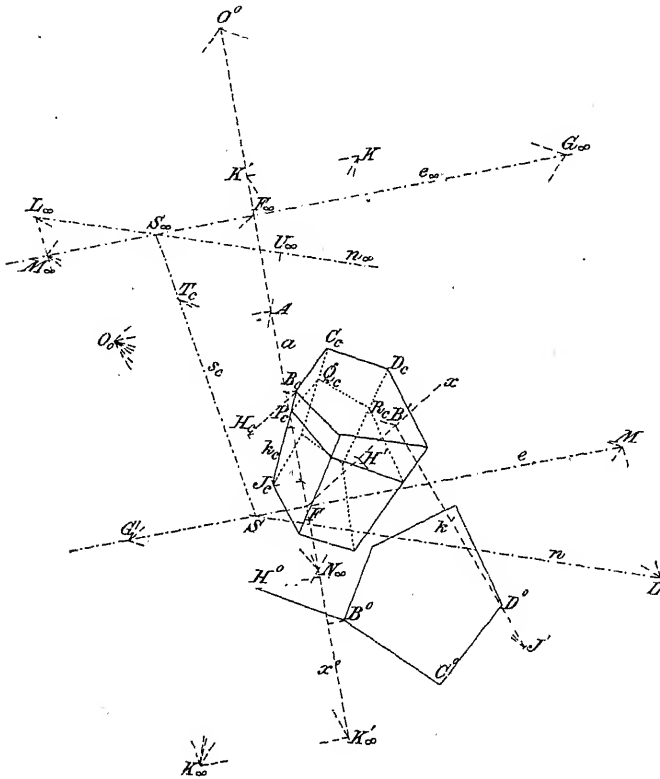


Fig. 70.

die also auch zu  $E$  normal ist und sie in einer Fallinie  $x$  schneidet; Spur- und Fluchtlinie dieser Ebene bildet das von  $A$  auf  $e$  gefällte Lot  $a = FF_\infty$ . Diese Ebene legen wir um die Linie  $a$  in die Bildebene um ( $O_0 A \parallel e$ ,  $O_0 A = \text{Distanz}$ ,  $x \parallel O_0 F_\infty$ ,  $x$  durch  $F$ ), und suchen in ihr die orthogonale Projektion der Kante  $BJ$ . Indem wir von  $B^0$  und  $H^0$  auf  $x^0$  Lote fallen und die Abstände ihrer Fußpunkte von  $F$  auf  $x$  auftragen, erhalten wir  $B'$  und  $H'$  und daraus  $J'$  ( $J'H' \perp x$ ,  $J'H' = JH$ ). Die Kante  $k = JB$  erscheint als Schnitt

zweier Ebenen, von denen die erstere in  $J'B'$  auf  $\Pi_1$  und die letztere in  $HB$  auf  $E$  senkrecht steht. Spur- und Fluchtlinie jener Ebene sind zu  $a$  normal in den Punkten  $K'$  und  $K_\infty'$  ( $K' = J'B' \times a$ ,  $O_0 K_\infty' \parallel J'B'$ ). Spur- und Fluchtlinie dieser Ebene gehen durch  $G$  und  $G_\infty$  ( $G = H^0 B^0 \times e$ ,  $O^0 G_\infty \parallel H^0 B^0$ ) und letztere enthält noch den Fluchtpunkt  $N_\infty$  aller zu  $E$  normalen Geraden. Damit ergeben sich Spur- und Fluchtpunkt  $K$  und  $K_\infty$  der Kante  $k$  als Schnitte der genannten Spur- und Fluchtlinien. Die Bilder aller parallelen Kanten des Prismas sind nach  $K_\infty$  gerichtet; als Endpunkt von  $k_e$  findet sich  $J_e = B_e K_\infty \times H_e N_\infty$ . Nach 80 liegen  $B_e$ ,  $H_e$  und  $J_e$  auch auf Geraden, die auf  $a$  in den Schnittpunkten mit  $O_0 B'$ ,  $O_0 H'$  und  $O_0 J'$  senkrecht stehen. Die Bilder paralleler Seiten der Endpolygone des Prismas schneiden sich auf  $e_\infty$ .

Bestimmt man auf  $AK_\infty$  den Punkt  $U_\infty$  gemäß der Relation:  $K_\infty A \cdot A U_\infty = (AO)^2$ , so ist die in  $U_\infty$  auf  $AK_\infty$  errichtete Normale  $n_\infty$  die Fluchtlinie aller zu den Prismenkanten senkrechten Ebenen. Durch die Wahl der Spur  $n$  ( $\parallel n_\infty$ ) wird eine bestimmte Normalebene  $N$  herausgegriffen, und es soll der in ihr liegende Normalschnitt gezeichnet werden. Zieht man durch  $K$  und  $K_\infty$ , den Spur- und Fluchtpunkt der Kante  $BJ$ , irgend zwei Parallele und schneidet sie mit  $n$  bzw.  $n_\infty$ , so geht die Verbindungslinie dieser Punkte durch das Bild  $P_e$  der auf  $BJ$  liegenden Ecke des Normalschnittes. Wäre dagegen  $P_e$  als Ecke eines Normalschnittes gegeben, so würde sich durch Umkehrung der Konstruktion die Spur  $n$  der Ebene des Normalschnittes ergeben. Um eine Seite des Normalschnittes zu erhalten, hat man eine Seitenfläche des Prismas mit  $N$  zu scheiden. Die Grundlinie  $CD$  hat den Fluchtpunkt  $M_\infty$ , also ist  $M_\infty K_\infty$  die Fluchtlinie der Seitenfläche durch  $CD$  und ihr Schnittpunkt  $L_\infty$  mit  $n_\infty$  der Fluchtpunkt einer Seite unseres Schnittes. Der zugehörige Spurpunkt  $L$  liegt auf  $n$ , und es ist  $LM \parallel M_\infty K_\infty$ ; auf  $LL_\infty$  liegt das Bild der Seite  $QR$ . Die Geraden  $CD$  und  $QR$  treffen sich in einem Punkte  $T$  von  $s = E \times N$ , ihre Bilder gehen also durch den nämlichen Punkt  $T_e$  von  $s_e$ . Die Sichtbarkeit der Kanten des Prismas erkennt man sofort aus der gegenseitigen Lage von  $O_0$ ,  $x$  und  $J'$ . Offenbar liegen Prisma und Auge zu verschiedenen Seiten der Ebene  $E$ .

83. Der schiefe Zylinder und sein Schnitt (Fig. 71). Gegeben sei eine Ebene  $E$  ( $e, e_\infty$ ), in ihr liege ein Kreis  $k$  als Basiskurve des Zylinders; ferner sei der Fluchtpunkt  $M_\infty$  seiner Mantellinien und die schneidende Ebene  $\Delta$  ( $d, d_\infty$ ) bekannt. Man suche zunächst das Bild  $k_e$  des Kreises  $k$ , indem man ihn um  $e$  nach  $k^0$  und das Auge um  $e_\infty$  nach  $O^0$  umlegt. Ein Durchmesser von  $k_e$





Da die Entfernung der Geraden  $e_c$  von  $e$  gleich der des Punktes  $O^0$  von  $e_\infty$  ist (164 Bd. I), so trage man auf  $K^0 F$  die Strecke  $FG = F_\infty O^0$  auf, dann besitzen die von  $G$  an den Kreis  $k^0$  gelegten Tangenten parallele Bilder, die  $k_c$  in den Endpunkten des zu  $e$  parallelen Durchmessers berühren.

Die Bilder der Mantellinien unseres Zylinders laufen verlängert durch  $M_\infty$ , sein scheinbarer Umriß wird also von den beiden aus  $M_\infty$  an  $k_c$  gelegten Tangenten gebildet. Sind  $U_c, V_c$  ihre Berührungspunkte mit  $k_c$ , so ist  $M_\infty$  der Pol von  $U_c V_c$ ; die entsprechende Sehne  $U^0 V^0$  von  $k^0$  ist also die Polare eines Punktes  $M^0$ , der dem Punkte  $M_\infty$  bei der perspektiven Beziehung von  $k_c$  und  $k^0$  entspricht ( $M_\infty M^0$  durch  $O^0$ ,  $M_\infty C$  durch  $F_\infty$ ,  $C M^0 \perp e$ ). Man kann die Sache auch folgendermaßen auffassen. Die aus dem Auge an den Zylinder gelegten Tangentialebenen berühren ihn im wahren Umriß, sie schneiden sich in einer Parallelen zu den Mantellinien durch das Auge  $O$ . Diese trifft die Ebene  $E$  in einem Punkte  $M$ , so daß die Tangenten von  $k$  in  $U$  und  $V$  sich in  $M$  schneiden.  $M_\infty$  ist das Bild von  $M$ , daher entsprechen sich  $M_\infty$  und der umgelegte Punkt  $M^0$  in der perspektiven Beziehung zwischen  $k_c$  und  $k^0$ . Man zeichne deshalb  $M^0$ ,  $U^0 V^0$  und dann die entsprechende Gerade  $U_c V_c$ .

Um das Bild der Schnittkurve  $c$  unseres Zylinders mit der Ebene  $\Delta$  zu gewinnen, kann man die perspektive Beziehung zwischen  $c_c$  und  $k_c$  benutzen.  $M_\infty$  ist das Zentrum und  $s_c$  ( $s = \Delta \times E$ ) die Achse dieser Perspektive; dabei entsprechen sich die Bilder je zweier Geraden von  $E$  und  $\Delta$ , die in einer zu den Mantellinien parallelen Ebene liegen. Jede zu  $e$  und den Mantellinien parallele Ebene besitzt die Fluchtlinie  $M_\infty W_\infty$  ( $\parallel e$ ), sie schneidet  $\Delta$  in einer Geraden mit dem Fluchtpunkte  $W_\infty$  (auf  $d_\infty$ ) und  $E$  in einer Parallelen zu  $e$ . Bei der perspektiven Beziehung zwischen  $k_c$  und  $c_c$  entsprechen also den Parallelen zu  $e$  die Geraden durch  $W_\infty$  (speziell  $e_\infty$  und  $d_\infty$ ), folglich entspricht der unendlich fernen Geraden des ersten Systems eine Parallele zu  $s_c$  durch  $W_\infty$ . Ähnlich entspricht der unendlich fernen Geraden des zweiten Systems eine Parallele  $x_c$  zu  $s_c$  durch  $X$  auf  $e$ , wenn  $SX = S_\infty X_\infty = W_\infty M_\infty$  ist. Dem Pol  $V_c$  von  $U_c V_c$  in bezug auf  $k_c$  entspricht hiernach der Mittelpunkt von  $c_c$ . Man suche also  $x^0$  ( $O^0 X_\infty$ ) und seinen Pol  $V^0$  in bezug auf  $k^0$  und ziehe durch  $V^0$  zwei konjugierte Polaren. Dann zeichne man ihre Bilder — es sind konjugierte Polaren von  $k_c$  — diesen entsprechen zwei konjugierte Durchmesser von  $c_c$ .

In der Zeichnung geht die Konstruktion von einem dem Kreise  $k^0$  umschriebenen Quadrate aus, dessen Seiten zu  $e$  parallel bzw. normal sind, dessen Diagonalen also mit  $e$  einen Winkel von  $45^\circ$  einschließen.

Die Bilder der Diagonalen (Fluchtpunkte  $O_d$  bzw.  $O^d$ ) und der Quadratseiten, sowie ihrer Berührungspunkte sind gezeichnet, daraus ergibt sich  $k_c$ . Das Quadrat ist die Grundfläche eines Prismas, dessen Seiten den Zylinder längs je einer Mantellinie berühren. Das Prisma wird von  $\Delta$  in einem Viereck geschnitten, dessen Bild der Ellipse  $c_c$  umgeschrieben ist. Der Fluchtpunkt zweier Quadratseiten ist  $F_\infty$ , folglich ist  $H_\infty = d_\infty \times M_\infty F_\infty$  der Fluchtpunkt der entsprechenden Seiten des Vierecks; die anderen Quadratseiten sind zu  $e$  parallel, folglich haben die zugehörigen Viereckseiten den Fluchtpunkt  $W_\infty$ . Überhaupt liegen die Fluchtpunkte entsprechender Geraden in  $\Delta$  und  $E$  auf  $d_\infty$  und  $e_\infty$  so, daß ihre Verbindungslinie durch  $M_\infty$  geht, ihre Spurpunkte auf  $d$  und  $e$  liegen auf einer Parallelen hierzu. Hierdurch bestimmen sich Seiten, Diagonalen und Berührungssehnens des der Ellipse  $c_c$  umschriebenen Vierecks. Die Umrißlinien berühren  $c_c$  in  $R_c$  und  $T_c$ , und es schneiden sich  $R_c T_c$  und  $U_c V_c$  auf  $s_c$ ; in der Figur ist noch der Schnittpunkt von  $R_c T_c$  mit einer Viereckseite gezeichnet.

Die Ellipse  $c_c$  läßt sich aus diesem umgeschriebenen Viereck einfach zeichnen, da sich nach 256 Bd. I die Diagonalen und die Verbindungslinien der Berührungspunkte der Gegenseiten eines jeden umschriebenen Vierecks in einem Punkte schneiden. Nimmt man also drei feste Tangenten der Kurve und verbindet die Berührungspunkte zweier, so bildet jeder Punkt der Verbindungslinie den Diagonalschnittpunkt eines umgeschriebenen Vierecks, von dem drei Seiten auf den festen Tangenten liegen. Man erhält so beliebig viele Tangenten mit ihren Berührungspunkten.

Wir wollen nun noch die Lichtgrenze auf dem Zylinder für einen beliebigen leuchtenden Punkt  $L$  konstruieren.  $L$  sei durch sein Bild  $L_c$  und seine orthogonale Projektion  $L'$  gegeben. Die Tangentialebenen durch  $L$  an den Zylinder berühren ihn in den Mantellinien der Lichtgrenze und haben die durch den leuchtenden Punkt gehende Parallele zu den Mantellinien gemein. Letztere schneidet die Basisebene  $E$  in einem Punkte  $Z(N_\infty = e_\infty \times M_\infty A, NL' \parallel M_\infty A, N$  auf  $e, Z_c = M_\infty L_c \times NN_\infty)$ ; die von ihm an den Kreis  $k$  gelegten Tangenten berühren denselben in zwei Punkten  $P$  und  $Q$  der Lichtgrenze. Man suche zuerst  $Z^0$  und seine Polare  $P^0 Q^0$  in bezug auf  $k^0$  und daraus  $P_c Q_c$ ; die Mantellinien der Lichtgrenze treffen die Ellipse  $c$  in zwei Punkten  $D$  und  $E$ , und es schneiden sich die Geraden  $D_c E_c, P_c Q_c$  und  $s_c$  in dem nämlichen Punkte  $B$ . Flucht- und Spurpunkte der Geraden  $P_c Q_c, D_c E_c$  sind nach dem oben Gesagten sofort anzugeben.



der vorausgehenden Nummer. Hierauf legen wir durch die Kegelachse eine Hilfsebene  $\Pi_1$  senkrecht zur Bildebene und legen sie um ihre Spurlinie in die Bildebene um. Diese Ebene ist normal zur Spur  $e$ , da die Kegelachse auf  $E$  normal steht; sie schneidet deshalb  $E$  in einer Falllinie  $f$  durch den Kreismittelpunkt  $K$  ( $AF_\infty \perp e_\infty$ ,  $K^0 F \perp e$ ,  $AO_0 = \text{Distanz}$ ,  $f_0 \parallel O_0 F_\infty$ ,  $f_0$  durch  $F$ ). Wir errichten jetzt im Punkte  $K_0$  ( $FK_0 = FK^0$ ) auf  $f_0$  eine Normale  $K_0 S_0$  gleich der Kegelhöhe, dann geht der Strahl  $O_0 S_0$  durch das Bild  $S_c$  des Kegelscheitels  $S$ . Dieses Bild liegt aber auch auf dem Bilde  $K_c N_\infty$  der in  $K$  auf  $E$  errichteten Normalen ( $N_\infty$  auf  $AF_\infty$ ,  $N_\infty O_0 \perp O_0 F_\infty$ ) und ist hierdurch bestimmt. Der scheinbare Umriß des Kegels wird von den beiden aus  $S_c$  an  $k_c$  gelegten Tangenten gebildet, die man dadurch findet, daß man zuerst die entsprechenden Tangenten an  $k^0$  sucht. Bei der perspektiven Zuordnung von  $k_c$  und  $k^0$  entspricht  $S_c$  ein Punkt  $S^0$ ; von ihm aus gehen zwei Tangenten an den Kreis  $k^0$ , deren Berührungspunkte  $B^0$  und  $C^0$  sein mögen. Die entsprechenden Bildpunkte  $B_c$  und  $C_c$  auf  $k_c$  gehören dem Umriß an.

Die Lichtgrenze des Kegels für einen leuchtenden Punkt  $L$  besteht aus den beiden Mantellinien, deren Tangentialebenen durch  $L$  gehen. Diese Ebenen enthalten die Gerade  $LS$  und folglich auch ihren Schnittpunkt  $T$  mit der Basisebene  $E$ ; sie schneiden daher  $E$  in den aus  $T$  an  $k$  gezogenen Tangenten, deren Berührungspunkte  $D$  und  $E$  sein mögen. Somit sind  $SD$  und  $SE$  die Mantellinien der Lichtgrenze. Ist  $L$  auf einer Geraden  $g$  ( $G$ ,  $G_\infty$ ) gegeben, so lege man durch sie eine Ebene senkrecht zu  $E$  und schneide sie mit ihr in  $h$  ( $H_\infty = e_\infty \times G_\infty N_\infty$ ,  $H$  auf  $e$ ,  $HG \parallel N_\infty G_\infty$ ). Dann ist  $T_c = h_c \times L_c S_c$  das Bild des gesuchten Punktes  $T$ , und die aus ihm an  $k_c$  gelegten Tangenten berühren diese Kurve in den gesuchten Punkten  $D_c$  und  $E_c$ . Um sie zu zeichnen, bestimme man wieder in der perspektiven Beziehung zwischen  $k_c$  und  $k^0$  den entsprechenden Punkt  $T^0$  zu  $T_c$  und die Berührungspunkte  $D^0$ ,  $E^0$  der von ihm an  $k^0$  gelegten Tangenten; diesen entsprechen dann rückwärts  $D_c$  und  $E_c$ . In der Figur sind die orthogonalen Projektionen  $L'$  und  $L''$  des Punktes  $L$  auf die Ebenen  $\Pi_1$  und  $E$  als bekannt vorausgesetzt.  $L'$  ist um die Spur von  $\Pi_1$  nach  $L'$ ,  $L''$  um die Spur  $e$  nach  $L''$  umgelegt (die Projektionen und ihre Umlegungen tragen die nämliche Bezeichnung). Dabei sind die Projektionen in der bekannten Weise miteinander verknüpft, d. h. die Fußpunkte der Lote, die man von  $L'$  auf  $f_0$  und von  $L''$  auf  $FK^0$  fällt, stehen gleichweit von  $F$  ab. Es ergibt sich die Projektion von  $T$  auf  $\Pi_1$  als  $T' = S_0 L' \times f_0$  und daraus der um die Spur  $e$  umgelegte Punkt  $T''$  auf  $K^0 F$  ( $FT' = FT''$ ). Dem-

nach ist  $T^0$  der Schnittpunkt der Geraden  $K^0L''$  mit der Parallelen zu  $e$  durch  $T'$ , woraus dann  $D^0, E^0$  und die Punkte  $T_c, D_c, E_c$  folgen ( $K^0T^0 \times e = H, T_c = K_cH \times O^0T^0$ ). Schneidet man noch  $K_cH$  mit  $L''O^0$ , so erhält man  $L_c''$  und  $L_c$  als Schnittpunkt von  $L_c''N_\infty$  mit  $S_cT_c$ .

Der sichtbare Teil des Kegelmantels ist der Geraden  $SO$  zugekehrt; er geht durch den Teil des Kreises  $k$ , der dem Punkte  $SO \times E$  zugekehrt ist (dessen Bild mit  $S_c$  zusammenfällt, da dieser auf der Strecke  $SO$  liegt). Durch Umlegung um die Spur  $e$  gelangt dieser Schnittpunkt nach  $S^0$ , dem der Kreisbogen  $B^0D^0C^0$  zugekehrt ist, so daß der Bogen  $B_cD_cC_c$  auf dem sichtbaren Teile des Kegelmantels liegt. Ähnlich erkennt man, daß der Teil des Mantels durch  $DCE$  im Lichte liegt.

85. Die Kugel (Fig. 73). Legt man vom Auge  $O$  den Tangentialkegel an eine Kugel  $K$ , so berührt er dieselbe in einem Kreise  $k$

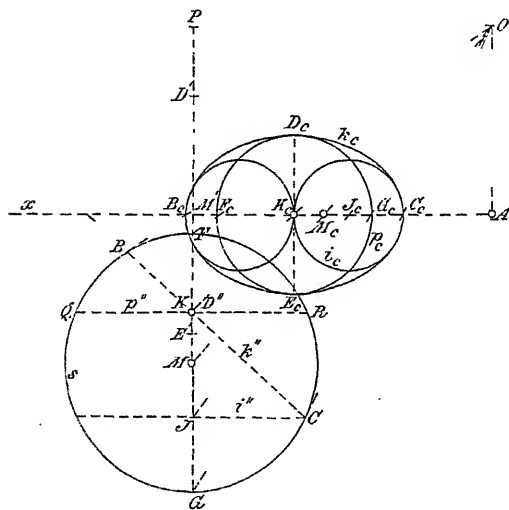


Fig. 73.

— dem wahren Umriss der Kugel — während er die Bildebene in einem Kegelschnitte  $k_c$  — dem scheinbaren Umriss — schneidet. Um  $k_c$  zu konstruieren, benutzen wir eine zur Bildebene normale Hilfsebene  $\Pi_2$  durch das Auge  $O$  und den Mittelpunkt  $M$  der Kugel. Letzterer mag durch sein Bild  $M_c$  und seine orthogonale Projektion  $M'$  gegeben sein, außerdem sei der Radius  $r$  der Kugel bekannt. Die Hilfsebene  $\Pi_2$  legen wir um ihre Spur  $x = M'M_cA$  um, dann gelangt der Kugelmittelpunkt nach  $M(AO \perp x, AO = \text{Distanz}, MM' \perp x, M = MM' \times OM_c)$  und der in  $\Pi_2$  liegende Kugelkreis nach  $s$  (die umgelegten Punkte sind ebenso bezeichnet, wie die Punkte in  $\Pi_2$  selbst). Die Ebene des wahren Umrisses  $k$  steht auf  $\Pi_2$  senkrecht; dieser schneidet  $s$  in zwei Punkten  $B$  und  $C$ , deren Tangenten durch  $O$  laufen. Das Bild  $B_cC_c$  der Kugelsehne  $BC$  ist die große Achse des scheinbaren Umrisses  $k_c$  und ihr Mittelpunkt  $K_c$  ist das Bild des Punktes  $K$  der Sehne  $BC$ , der dem

zur Bildebene normalen Kugeldurchmesser angehört ( $K = MM' \times BC$ ). Ist nämlich  $MP \parallel AO$ , so ist  $OP$  die Polare von  $K$ , denn sie muß erstens durch den Pol  $O$  von  $BC$  gehen und zweitens auf  $MK$  senkrecht stehen. Demnach sind die vier Strahlen  $OB, OC, OK, OP$  harmonisch (29 Bd. III) und folglich auch ihre Schnittpunkte mit  $x$ ; einer derselben ist aber unendlich fern, also halbiert  $K_c$  die Strecke  $B_c C_c$ . Das Bild der Kugelsehne  $DE$ , die in  $K$  auf  $\Pi_2$  senkrecht steht, stellt die kleine Achse des scheinbaren Umrisses dar; denn  $DE$  ist zur Bildebene parallel, so daß  $D_c E_c$  zu  $x$  normal wird. Zur Konstruktion kann man die orthogonalen Projektionen von  $D$  und  $E$  auf die Bildebene benutzen, und zwar liegen  $D', E'$  zu  $x$  symmetrisch, und es ist  $D'E' = QR$  (der zu  $x$  parallelen Kugelsehne durch  $K$ ); dann tragen  $AD'$  und  $AE'$ , die gesuchten Bildpunkte  $D_c$  und  $E_c$ .

Alle zur Bildebene parallelen Kugelkreise liefern kreisförmige Bilder; sie schneiden den wahren Umriß  $k$  in je zwei Punkten, während ihre Bilder den scheinbaren Umriß  $k_c$  in den entsprechenden Punkten berühren. So gehört zu dem zur Bildebene parallelen Kugelkreise  $p$  mit dem Mittelpunkt  $K$  als Bild der Kreis  $p_c$  mit dem Durchmesser  $D_c E_c$ ; sein auf  $x$  liegender Durchmesser ist das Bild der Kugelsehne  $QR$ . Da  $p_c$  den scheinbaren Umriß in den Endpunkten des Durchmessers  $D_c E_c$  berührt, folgt wiederum, daß  $D_c E_c$  zugleich kleine Achse von  $k_c$  ist. Legt man durch  $C$  den zur Bildebene parallelen Kugelkreis  $i$  mit dem Mittelpunkt  $J$ , so berührt er  $k$  in  $C$ ; sein Bild  $i_c$  ist deshalb der Krümmungskreis der Ellipse  $k_c$  im Endpunkt  $C_c$  ihrer großen Achse,  $J_c$  ist der zugehörige Krümmungsmittelpunkt. Analog ergibt sich der Krümmungskreis im Punkte  $B_c$ . Die Bilder  $F_c, G_c$  der Endpunkte des zur Bildebene normalen Kugeldurchmessers  $FG$  sind die Brennpunkte der Ellipse  $k_c$ . Denn der Rotationskegel mit dem Scheitel  $O$  und dem Leitkreise  $k$  wird von der Tangentialebene im Punkte  $F$  der Kugel in einer Ellipse mit dem Brennpunkte  $F$  geschnitten (86 Bd. III). Diese Ellipse ist zu  $k_c$  ähnlich und in ähnlicher Lage mit  $O$  als Ähnlichkeitszentrum, woraus die vorstehende Behauptung folgt.

Der scheinbare Umriß  $k_c$  kann demnach auch in der Weise bestimmt werden, daß man auf  $x$  die Bilder der Punkte  $B, C, F$  und  $G$  zeichnet und um  $F_c$  mit der halben großen Achse als Radius einen Kreis schlägt; dieser geht dann durch die Endpunkte der kleinen Achse.

**86.** Die Lichtgrenze auf der Kugel bei Zentralbeleuchtung (Fig. 74). Wir bestimmen zunächst in der vorher geschilderten Weise den wahren Umriß  $k$  und den scheinbaren Umriß  $k_c$  der Kugel,



ebene des Punktes  $W$  in bezug auf die Kugel; folglich steht  $UV$  in  $R$  auf  $\Pi_2$  senkrecht. Die Punkte  $U, V$  liegen auf einem zur Bildebene parallelen Kugeldurchmesser  $h$ , dessen Ebene durch  $R$  geht; sein Bild  $h_c$  schneidet deshalb die in  $R_c$  auf  $x$  errichtete Normale in den Bildpunkten  $U_c, V_c$ . Das Bild  $i_c$  der Lichtgrenze hat somit die Achsen  $P_c Q_c$  und  $U_c V_c$ .

Wie ändern sich nun die Verhältnisse, wenn an Stelle des leuchtenden Punktes  $J$  ein leuchtender Punkt  $L$  tritt, der aus  $J$  durch eine Drehung um den Kugeldurchmesser  $MM'$  ( $\perp \Pi$ ) hervorgeht ( $M'J' = M'I', \angle J'M'L' = \alpha, I'_c$  auf  $AL', J'_c L'_c \parallel J'L'$ , da  $JL \parallel \Pi$  ist)? Dann geht offenbar auch die Lichtgrenze  $l$  für den leuchtenden Punkt  $L$  aus dem Kreise  $i$  durch Drehung um die Achse  $MM'$  hervor; speziell mögen hierbei die Punkte  $P, Q, U, V$  von  $i$  in die Punkte  $S, T, X, Y$  von  $l$  übergehen. Die Bilder der Sehnen  $ST$  und  $XY$  von  $l$  sind alsdann konjugierte Durchmesser des Bildes  $l_c$  der Lichtgrenze  $l$ . Denn  $ST$  halbiert alle zur Bildebene parallelen Sehnen von  $l$ , und der Pol der Sehne  $XY$ , oder der gedrehte Punkt  $W$ , liegt in der Verschwindungsebene, d. h. in der zur Bildebene parallelen Ebene durch das Auge. Da alle Punkte eine Drehung um den gleichen Winkel  $\alpha$  und um die gleiche Achse  $MM'$  erfahren, sind die Sehnen  $PS$  und  $QT$  zu  $J'L'$  parallel und also auch ihre Bilder. Die Punkte  $X, Y$  liegen auf  $h$ , ihre Bilder auf  $h_c$ , und es ist  $X_c Y_c$  zu  $M'L'$  normal, da  $XY \perp M'L'$  ist und beide Linien zur Bildebene parallel laufen.

Sind  $F, F_\infty$  Spur- und Fluchtpunkt der Geraden  $PQ$ , so ergeben sich aus ihnen Spur- und Fluchtpunkt  $G$  und  $G_\infty$  der gedrehten Geraden  $ST$  ( $\angle FM'G = \angle F_\infty A G_\infty = \alpha, M'G = M'F, A G_\infty = A F_\infty$ ). Zieht man durch  $P_c, Q_c, R_c$  Parallele zu  $J'L'$ , so schneiden sie auf  $G G_\infty$  den Durchmesser  $S_c T_c$  von  $l_c$  und seinen Mittelpunkt  $Z_c$  aus ( $Z = ST \times XY$ ). Das von  $Z_c$  auf  $M'L'$  gefällte Lot trifft  $h_c$  in den Endpunkten  $X_c, Y_c$  des zu  $S_c T_c$  konjugierten Durchmessers von  $l_c$ , wodurch diese Kurve bestimmt ist. Die Lichtgrenze  $l$  und der Umriss  $k$  schneiden sich in zwei Punkten, ihre Bilder  $l_c$  und  $h_c$  berühren sich in den Bildern dieser Punkte. Spur- und Fluchtlinie der Ebene der Lichtgrenze stehen auf  $M'L'$  senkrecht und gehen durch  $G$  bzw.  $G_\infty$ ; Spur- und Fluchtlinie der Ebene des Umrisses stehen auf  $x$  senkrecht und gehen durch  $B (= BC \times x)$  bzw.  $E_\infty$  ( $O E_\infty \parallel BC$ ). Daraus ergibt sich das Bild der Schnittlinie beider Ebenen, das durch die genannten Berührungspunkte hindurchgeht.

Um hiernach für einen beliebigen leuchtenden Punkt  $L$  die Lichtgrenze  $l$  auf der Kugel und ihr Bild  $l_c$  zu finden, hat man folgendermaßen zu verfahren. Man drehe  $L$  um den zur Bildebene



normalen Kugeldurchmesser  $MM'$  in die Lage  $J$ , so daß die gedrehte Ebene durch das Auge  $O$  geht. Diese möge die Kugel im Kreise  $s$  schneiden, dann suche man die Polare  $PQ$  von  $J$  in bezug auf  $s$ , schneide sie mit  $JK$  in  $R$  und lege durch  $R$  eine Ebene parallel zur Bildebene; sie wird die Kugel in einem Kreise  $h$  schneiden. Jetzt zeichne man die Bilder  $P_c$ ,  $Q_c$ ,  $R_c$  und  $h_c$ , sowie Spur- und Fluchtpunkt von  $PQ$ , alsdann Spur- und Fluchtpunkt der gedrehten Geraden  $ST$ . Auf dieser Bildgeraden liegt ein Durchmesser  $S_cT_c$  von  $l_c$ , während der konjugierte  $Y_cX_c$  auf  $M'L'$  senkrecht steht und von  $h_c$  begrenzt wird.

**87. Rotationsflächen.** Soll der Umriß  $u_c$  einer Rotationsfläche, deren Achse  $d$  zur Bildebene parallel ist, gefunden werden, so suche man zunächst das Bild  $d_c$  der Achse und das Bild  $m_c$  der zur Bildebene parallelen Meridiankurve  $m$ . Läßt man jetzt  $m_c$  um  $d_c$  rotieren, so entsteht eine zur ursprünglichen Fläche ähnliche Rotationsfläche; das Ähnlichkeitszentrum liegt in  $O$ , so daß beide Flächen den nämlichen scheinbaren Umriß aufweisen. Wir können deshalb gleich annehmen, daß die Achse  $d$  und die Meridiankurve  $m$  der Rotationsfläche, deren scheinbaren Umriß wir suchen sollen, in der Bildebene liegen (Fig. 75).

Ist  $h$  ein beliebiger Parallelkreis unserer Fläche, der  $m$  in  $H$  und  $J$  treffen mag, so wird sie (§74 Bd. I) längs  $h$  von einem Rotationskegel berührt, durch dessen Spitze  $S$  auf  $d$  die Tangenten von  $m$  in den Punkten  $J$  und  $H$  gehen. Die beiden Tangenten von  $S$  an das Bild  $h_c$  des Parallelkreises bilden den scheinbaren Umriß des Rotationskegels; sie berühren  $h_c$  in zwei Punkten  $C_c$  und  $E_c$ , in denen sie zugleich den Umriß  $u_c$  berühren. Denn  $C$  und  $E$  auf  $h$  gehören dem wahren Umriß des Kegels an; ihre Tangentialebenen gehen somit durch  $O$ , und da sie zugleich die Rotationsfläche tangieren, liegen  $C$  und  $E$  auch auf  $u$ . Während aber  $h$  den wahren Umriß  $u$  auf der Fläche schneidet, muß sein Bild  $h_c$  den scheinbaren Umriß  $u_c$  berühren;  $u_c$  und  $h_c$  berühren sich also in  $C_c$  und  $E_c$ , so daß  $SC_c$  und  $SE_c$  die bezüglichen Tangenten sind. Um die Punkte  $C_c$  und  $E_c$  zu bestimmen, legen wir  $h$  um  $JH$  als  $h_0$  in die Bildebene um und benutzen die perspektive Beziehung zwischen  $h_c$  und  $h_0$ . Die Fluchtlinie aller Parallelkreisebenen ist das vom Hauptpunkte  $A$  auf die Achse  $d$  gefällte Lot  $AB$ . Das um  $AB$  in die Bildebene umgelegte Auge  $O_0$  ist das Zentrum jener perspektiven Beziehung,  $JH$  ist ihre Achse,  $AB$  ihre Fluchtlinie. Nun suchen wir zu  $S$  den entsprechenden Punkt  $S_0$ , indem wir  $SA$  ziehen, in ihrem Schnittpunkte  $G$  mit  $JH$  auf dieser eine Normale errichten und dieselbe mit  $SO_0$  in  $S_0$

schneiden. In der Tat entspricht der Geraden  $GA$  die Gerade  $GS_0$  ( $\parallel AO_0$ ) und  $SO_0$  geht durch  $S_0$ . Die von  $S_0$  an  $k_0$  gelegten Tangenten mögen diesen Kreis in  $C_0$  und  $E_0$  berühren und  $JH$  in

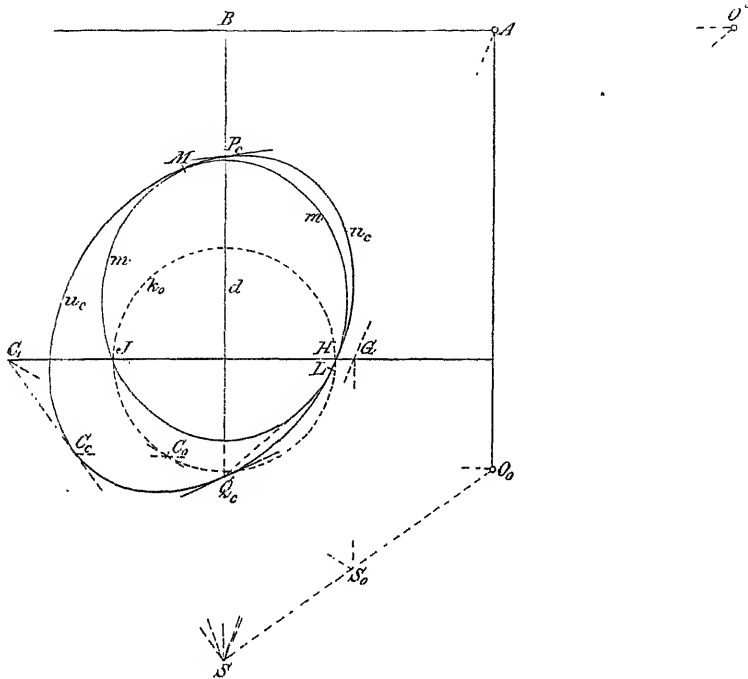


Fig. 75.

$C_1$  und  $E_1$  schneiden, dann sind  $SC_1$  und  $SE_1$  die entsprechenden Tangenten an  $k_c$ , ihre Berührungspunkte  $C_c$  und  $E_c$  liegen auf  $O_0C_0$  bzw.  $O_0E_0$ .

Der scheinbare Umriß  $u_c$  berührt die Meridiankurve  $m$  in zwei Punkten  $L$  und  $M$ , deren Tangenten durch  $A$  gehen. Die Tangentialebenen unserer Fläche in  $L$  und  $M$  sind nämlich zur Bildebene senkrecht, sie enthalten deshalb die Gerade  $AO$ , gehen also durch das Auge, so daß ihre Berührungspunkte dem Umriß angehören. Liegt in der Ebene  $Od$  die Meridiankurve  $n$  und wird sie von den aus  $O$  an sie gelegten Tangenten in  $P$  und  $Q$  berührt, so gehören diese Punkte dem Umriß  $u$  an. Ihre Bilder  $P_c$  und  $Q_c$  werden auf  $d$  von den Strahlen  $OP$  und  $OQ$  ausgeschnitten; man konstruiert sie durch Umlegen der Ebene  $Od$  in die Bildebene ( $O^0A$  auf  $AB$ ,  $O^0B = O_0B$ ,  $O^0P_c$  und  $O^0Q_c$  tangieren  $m$ ). Nun ist der Umriß  $u$  zur Ebene  $Od$

symmetrisch, seine Tangenten in  $P$  und  $Q$  stehen sonach auf  $Od$  senkrecht. Demnach gehen die Tangenten von  $u_c$  in  $P_c$  und  $Q_c$  durch den Fluchtpunkt  $N_\infty$  aller Normalen der Ebene  $Od$  ( $N_\infty$  auf  $AB$   $\perp V_\infty O_0 \perp O_0 B$ ).

88. Auch bei beliebiger Richtung der Rotationsachse  $d$  gegen die Bildebene kann die vorher beschriebene Konstruktion mit einer kleinen Abänderung verwendet werden (Fig. 76). Durch die Achse  $d$  lege man eine Normalebene zur Bildebene und drehe dieselbe um

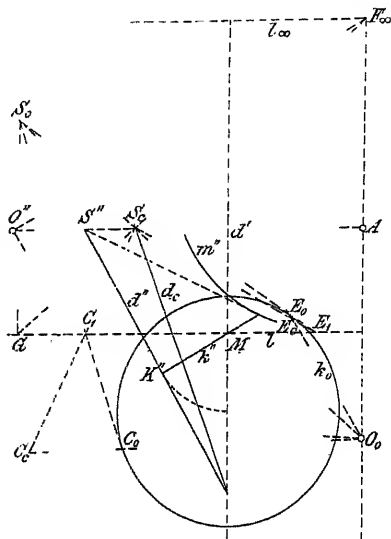


Fig. 76.

ihre Spur  $d'$  in die Bildebene, so erhält man  $d''$ ,  $m''$ ; zugleich drehe man das Auge um  $AF_\infty$  ( $\parallel d'$ ) nach  $O''$ . Jeder Punkt  $K$  von  $d$  ist der Mittelpunkt eines Parallelkreises  $k$  seine Ebene sei  $\Lambda$ , ihre Spur- und Fluchtlinie seien  $l$  und  $l_\infty$  ( $l_\infty \parallel l \perp d'$ ,  $l$  durch  $M = k'' \times d'$ ,  $F_\infty O'' \parallel k''$ ,  $l_\infty$  durch  $F_\infty$ ). Ist  $S$  auf  $d$  wieder der Scheitel des Kegels, der die Fläche längs  $k$  tangiert, und  $S_c$  auf  $d_c$  sein Bild ( $S_c = O'' S'' \times d_c$ ), so sind die Tangenten von  $S_c$  an  $k_c$  zu bestimmen. Legt man  $k$  um  $l$  nach  $k_0$  und  $O$  um  $l_\infty$  nach  $O_0$  um ( $O_0 F_\infty = O'' F_\infty$ ), so sind  $k_0$  und  $k_c$  perspektiv. Dem Punkt  $S_c$

entspricht  $S_0$  ( $F_\infty S_c \times l = G$ ,  $G S_0 \parallel F_\infty A$ ,  $S_0$  auf  $O_0 S_0$ ); die Tangenten aus  $S_0$  an  $k_0$  berühren in  $C_0$  und  $E_0$ , denen die Punkte  $C_c$  und  $E_c$  entsprechen ( $S_0 C_0 \times l = C_1$ ,  $S_0 E_0 \times l = E_1$ ,  $C_c = S_c C_1 \times O_0 C_0$ ,  $E_c = S_c E_1 \times O_0 E_0$ ). Der Umriß  $u_c$  geht durch  $C_c$  und  $E_c$  und berührt daselbst die Geraden  $S_c C_c$  und  $S_c E_c$ .

Ist die Rotationsachse senkrecht zur Bildebene, so sind die Bilder der Parallelkreise selbst Kreise und der scheinbare Umriß umhüllt alle diese Kreise.

89. Den Umriß einer Fläche 2. Grades zu zeichnen, von der drei konjugierte Durchmesser im Bilde gegeben sind (Fig. 77). Es seien  $M_c$  das Bild des Mittelpunktes und  $A_c B_c$ ,  $C_c D_c$ ,  $E_c F_c$  die Bilder der konjugierten Durchmesser, dann werden diese durch  $M_c$  und die bezüglichen Fluchtpunkte  $X_\infty$ ,  $Y_\infty$  und  $Z_\infty$  harmo-

nisch geteilt. Denn jeder Durchmesser wird durch den Mittelpunkt und den unendlich fernen Punkt harmonisch geteilt. Man konstruiere also entweder direkt zu  $A_c, B_c, M_c$  den vierten harmonischen Punkt usw., oder man zeichne die Punkte  $A_c D_c \times B_c C_c$  und  $A_c C_c \times B_c D_c$ , die auf  $X_\infty Y_\infty$  liegen, usw. Nun ergeben sich die Bilder  $p_c, q_c, r_c$  der zugehörigen Diametralschnitte sofort; so geht  $p_c$  durch  $A_c, B_c, C_c, D_c$  und berührt daselbst die Geraden  $A_c Y_\infty, B_c Y_\infty, C_c X_\infty, D_c X_\infty$ ;

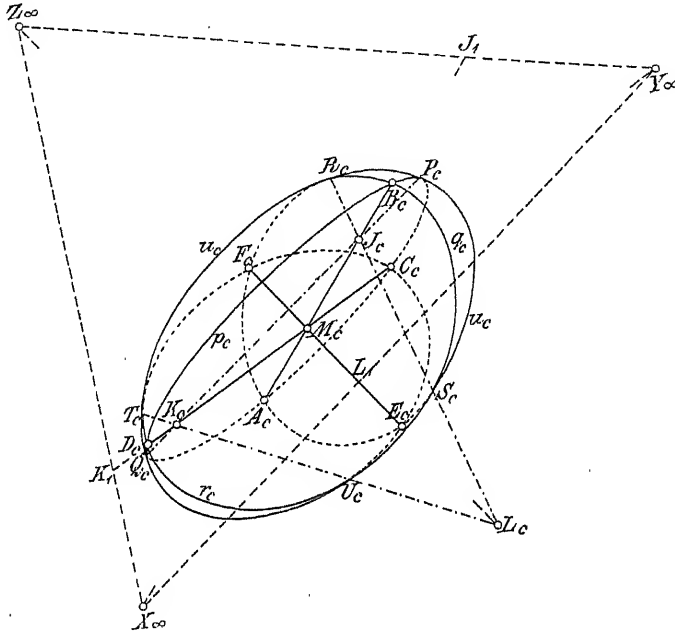


Fig. 77.

beliebig viele Punkte und Tangenten von  $p_c$  findet man mit Hilfe umgeschriebener Vierecke (256 Bd. I).

Längs  $p$  wird die Fläche von einem Zylinder berührt, dessen Mantellinien zu  $EF$  parallel laufen; ihre Bilder gehen durch  $Z_\infty$ , und die beiden von  $Z_\infty$  an  $p_c$  gelegten Tangenten bilden den scheinbaren Umriß des Zylinders. Berühren diese Tangenten die Ellipse  $p_c$  in den beiden Punkten  $P_c$  und  $Q_c$ , so gehen die gemeinsamen Tangentialebenen von Zylinder und Fläche in  $P$  und  $Q$  durch das Auge. Demnach liegen  $P_c$  und  $Q_c$  auf dem Umriß  $u_c$  der Fläche, und dieser berührt in diesen Punkten die Ellipse  $p_c$ . Ganz analog wird der Umriß  $u_c$  die Kurven  $q_c$  und  $r_c$  in je zwei Punkten  $R_c, S_c$  bzw.  $T_c, U_c$  berühren. Die Konstruktion gestaltet sich wie folgt. Man

schneide  $A_c B_c$ ,  $C_c D_c$ ,  $E_c F_c$  mit den Seiten des Dreiecks  $X_\infty Y_\infty Z_\infty$  bezüglich in  $J_1$ ,  $K_1$ ,  $L_1$  und suche die drei Punkte  $J_c$ ,  $K_c$ ,  $L_c$ , die mit jenen zusammen die drei genannten Strecken harmonisch teilen ( $(A_c B_c J_c J_1) = -1$ , usw.). Da  $A_c B_c$  die Polare von  $Y_\infty$  in bezug auf  $p_c$  ist, liegt der Pol von  $Y_\infty Z_\infty$  auf  $A_c B_c$  und zwar in  $J_c$ ; analog stellt  $K_c$  den Pol von  $X_\infty Z_\infty$  in bezug auf  $p_c$  vor. Somit ist  $J_c K_c$  die Polare von  $Z_\infty$  in bezug auf  $p_c$ , und es sind  $Z_\infty K_1$ ,  $Z_\infty K_c$ , sowie  $Z_\infty J_1$ ,  $Z_\infty J_c$  harmonische Polaren von  $p_c$ . Diese beiden Geradenpaare definieren aber eine Involution, deren Doppelstrahlen die gesuchten Tangenten von  $p_c$  sind (32 Bd. III); ihre Berührungspunkte liegen auf  $J_c K_c$ . Diese Doppelstrahlen ergeben sich nach 235 Bd. I unter Zuhilfenahme eines Kreises.

Hiernach lassen sich also die drei Paar Berührungspunkte des Umrisses  $u_c$  mit den Kurven  $p_c$ ,  $q_c$ ,  $r_c$  leicht finden und aus sechs Punkten und den zugehörigen Tangenten der Umriß  $u_c$  zeichnen. Die Ebene des wahren Umrisses  $u$  schneidet die drei gegebenen Durchmesser in den Punkten  $J$ ,  $K$  und  $L$ .

Es mag hier darauf hingewiesen werden, daß drei beliebige Strecken  $A_c B_c$ ,  $C_c D_c$  und  $E_c F_c$ , die einen Punkt  $M_c$  gemein haben, nicht immer die Bilder dreier Achsen eines Ellipsoides darstellen. Das ist offenbar nur dann der Fall, wenn das Dreieck ihrer Fluchtpunkte  $((A_c B_c M_c X_\infty) = -1)$  spitzwinklig ist. Denn sein Höhenschnittpunkt ist der Hauptpunkt, und dieser liegt stets zwischen dem Fluchtpunkt einer Geraden und der Fluchtlinie einer zu ihr normalen Ebene (74). Falls es sich um die Bilder der Achsen handelt, kann man auch die Länge der Achsen sofort angeben, da man ja Hauptpunkt und Auge in diesem Falle kennt. Freilich muß noch die Entfernung des Mittelpunktes von der Bildebene bekannt sein, sonst ergeben sich nur die Verhältnisse der Achsen.

90. Haben wir es mit drei konjugierten Durchmessern einer beliebigen Fläche 2. Grades zu tun, so werden einer oder zwei von diesen Durchmessern imaginär sein, was jedoch die obige Konstruktion nur wenig ändert. Ist z. B.  $AB$  ein imaginärer Durchmesser, d. h. sind  $A, B$  die Gleichpunkte der auf dieser Geraden liegenden Involution harmonischer Pole der Fläche (vgl. 211—213 Bd. III), so ergibt sich  $X_\infty$  wie vorher, dagegen bildet  $J_c$  mit  $J_1$  zusammen ein Punktepaar der Involution, die durch die beiden Paare  $X_\infty M_c$  und  $A_c B_c$  definiert ist. Die Tangenten aus  $Z_\infty$  an  $p_c$  sind wieder die Doppelstrahlen der Involution, der die Strahlenpaare durch  $K_1, K_c$  und  $J_1, J_c$  angehören.

## DRITTES KAPITEL.

### Angewandte Perspektive

#### Allgemeines.

91. Das perspektive Bild eines räumlichen Gegenstandes erleichtert uns seine Vorstellung in höherem Maße als seine Darstellung in orthogonaler oder schiefer Parallelprojektion. Der Grund davon ist, daß die geometrischen Gesetze der Zentralprojektion dem Vorgange beim Sehen wirklicher Dinge insofern genau entsprechen, als man von dem „Körperlich-Sehen“ abstrahiert, das durch das Zusammenwirken beider Augen zustande kommt. Denn beim Sehen mit einem Auge erzeugen die vom Objekte ausgehenden Lichtstrahlen, durch die Augenlinse vereinigt, auf der Netzhaut ein perspektives Bild. Man kann folglich auch jede perspektive Zeichnung in eine solche Lage zum Auge bringen, daß sich die Netzhautbilder ihrer Linien mit denen der entsprechenden Linien des Gegenstandes decken und hierdurch wird der höchste Grad von Anschaulichkeit erreicht, den eine Zeichnung gewähren kann. Dagegen kann man aus einer Perspektive die wahren Größen von Strecken und Winkeln nicht so einfach und genau entnehmen wie aus einer Parallelprojektion. Bei letzterer ergeben z. B. parallele und gleiche Strecken auch parallele und gleiche Bilder, während bei der Zentralprojektion sowohl die Richtung als auch die Größe ihrer Bilder verschieden ausfällt, usw. Man wird also die Art der Projektion nach dem Zwecke wählen, den man durch die Darstellung erreichen will. Kommt es vor allem anderen auf die anschauliche Wirkung an, wie in der Malerei und den zeichnenden Künsten, so hat man die Zentralperspektive zu wählen. Wir haben uns darauf zu beschränken, die Anwendung ihrer Regeln auf solche Objekte zu zeigen, die geometrisch gesetzmäßige Formen haben. Dies trifft namentlich für die architektonischen Gegenstände zu; und wie es bei diesen üblich ist, wollen wir uns die abzubildenden Figuren durch Grund- und Aufriß gegeben denken; an ihre Stelle kann natürlich auch die Angabe von Maßen treten. Wir erkennen also die Hauptaufgabe

der angewandten Perspektive darin, in einer gegebenen Ebene und für einen gegebenen Augenpunkt das perspektive Bild eines durch Grund- und Aufriß gegebenen Objektes zu konstruieren<sup>a)</sup>.

Die zur Lösung dieser Aufgabe dienlichen Methoden sind größtenteils bereits im vorhergehenden Kapitel entwickelt worden. Die dort bewiesenen Sätze werden wir uns jetzt für die Anwendungen zurechtzulegen haben.

**92.** Wir denken uns eine horizontale Ebene  $\Pi_1$ , die Grundebene oder Bodenfläche; auf ihr und über ihr sollen sich die Objekte befinden. Die Bildebene  $\Pi$  stellen wir vertikal, so daß jede vertikale Gerade des Raumes auch ein vertikales Bild erhält; dies trägt wesentlich zur Erhöhung der Anschaulichkeit bei, weil unser Auge infolge vielfältiger Übung für die Abweichung gerader Linien von der vertikalen Richtung sehr empfindlich ist. Die Schnittlinie  $g$  der Bildebene  $\Pi$  mit der Grundebene  $\Pi_1$  heißt die Grundlinie (Grundschnitt, Basislinie). Das Auge  $O$  (Augpunkt, Gesichtspunkt)

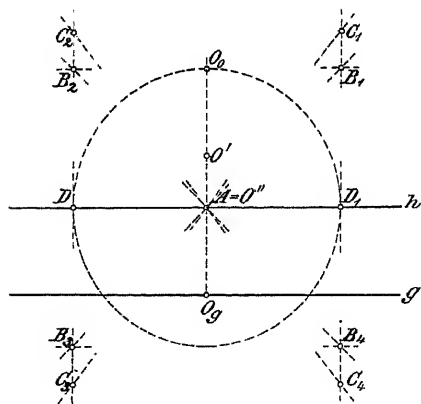


Fig. 78.

wird vor  $\Pi$  und oberhalb  $\Pi_1$  gewählt. Die Parallelebene zu  $\Pi$  durch das Auge heißt die Verschwindungsebene; sie enthält die Verschwindungslinien aller Ebenen und die Verschwindungspunkte aller Geraden des Raumes. Die senkrechte Projektion  $A$  des Auges  $O$  auf die Bildebene  $\Pi$  heißt der Hauptpunkt (Fig. 78) und die Länge  $OA$  die Distanz. Die Parallelebene  $H$  zu  $\Pi_1$  durch  $O$  wird die Horizontalebene und ihre Schnittlinie  $h$  mit  $\Pi$  wird Horizont (Horizontlinie) genannt;  $h$  ist die Fluchtlinie aller horizontalen Ebenen und trägt die Fluchtpunkte aller horizontalen Geraden, insbesondere den Hauptpunkt  $A$  als Fluchtpunkt aller Normalen zu  $\Pi$ . Der Distanzkreis wird in  $\Pi$  um  $A$  beschrieben, seine Schnittpunkte  $D, D_1$  mit  $h$  heißen die Distanzpunkte. Die Fluchtlinien der unter  $45^\circ$  gegen  $\Pi$  geneigten Ebenen berühren  $d$ , die Fluchtpunkte der Geraden von der Neigung  $45^\circ$  gegen  $\Pi$  liegen auf  $d$ ; speziell sind  $D$  und

$D_1$  die Fluchtpunkte der Horizontalen mit der Bildneigung von  $45^\circ$ .

Das Objekt wird hinter der Bildebene befindlich angenommen. Seinen Grundriß entwerfen wir in der Grundebene  $\Pi_1$  und legen ihn um die Grundlinie  $g$  in die Bildebene um, so daß der hinter der Bildebene befindliche Teil von  $\Pi_1$  nach unten kommt, der oberhalb  $g$  liegende Teil von  $\Pi$  aber für das perspektive Bild des Objektes frei bleibt. Die umgelegten Elemente des Grundrisses werden ebenso bezeichnet wie diese selbst. Das Auge  $O$  gelangt bei gleichsinniger Drehung um den Horizont  $h$  in den Punkt  $O_0$  des Distanzkreises ( $AO_0 \perp h$ ), der schlechthin als das umgelegte Auge bezeichnet wird. Der Grundriß  $O'$  des Auges findet sich auf  $AO_0$  und zwar ist  $(O' \rightarrow g)$  gleich der Distanz, mithin auch  $O_0 O' = (A \rightarrow g)$ . Die Aufrißebene  $\Pi_2$  stellen wir natürlich vertikal und parallel zu den wichtigsten wagrechten Kanten des Gegenstandes. Die Schnittlinie  $\Pi_1 \times \Pi_2$  bezeichnen wir wie früher durch  $x$ . Die meisten Objekte und namentlich die architektonischen besitzen vertikale Seitenflächen in zwei zueinander rechtwinkligen Stellungen, die wir kurz als Frontflächen bezeichnen können. Ist die Bildebene  $\Pi$  zu einer Front des Gegenstandes parallel, so gibt sein Bild eine gerade Ansicht; anderenfalls spricht man von einer schrägen Ansicht.

Im ersten Falle läßt man die Aufrißebene  $\Pi_2$  mit der Bildebene  $\Pi$  und folglich  $x$  mit  $g$  zusammenfallen. Im zweiten Falle wird  $\Pi_2$  parallel zu einer Front und folglich gegen  $\Pi$  geneigt angenommen. Wir ziehen durch den Bildspurpunkt von  $x$  auf  $g$  die Vertikale  $z = \Pi_2 \times \Pi$  und die Horizontale  $y$  rechtwinklig zu  $x$ . Den Aufriß legen wir um  $z$  in  $\Pi$  um und benennen die umgelegten Aufrißelemente ebenso wie diese selbst. Die Umlegung suche man so einzurichten, daß das perspektive Bild und der Aufriß des Objektes sich nicht gegenseitig in störender Weise verdecken. Wichtig ist es, die Fluchtpunkte  $X_\infty, Y_\infty$  der Achsen  $x$  und  $y$  ( $O_0 X_\infty \parallel x, O_0 Y_\infty \parallel y, X_\infty$  und  $Y_\infty$  auf  $h$ ), sowie den umgelegten Aufriß  $O''$  des Auges anzugeben.  $O''$  liegt auf  $h$  und die von  $O'$  bzw.  $O''$  auf  $x$  bzw.  $g$  gefällten Lote sind von  $g \times x \times z$  gleich entfernt (vgl. Fig. 83).

**93.** Die Konstruktion der Perspektive eines Punktes  $P$  mit gegebenem Grund- und Aufriß  $P', P''$  richtet sich danach, ob  $\Pi_2$  mit  $\Pi$  identisch ist oder nicht, d. h. ob eine gerade oder schräge Ansicht des Objektes verlangt wird. Wir stellen die einfachsten Verfahren kurz zusammen.



Erstens: bei gerader Ansicht.

$\alpha$ ) Man zieht in  $\Pi_1$  durch  $P'$  zwei Gerade normal bzw. unter  $45^\circ$  geneigt gegen  $g$ . Ihre Spurpunkte seien  $N$  und  $M$  auf  $g$ ; ihre Fluchtpunkte sind der Hauptpunkt  $A$  und einer der Distanzpunkte

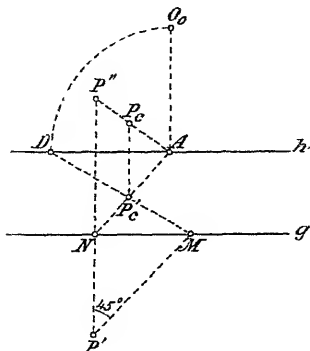


Fig. 79.

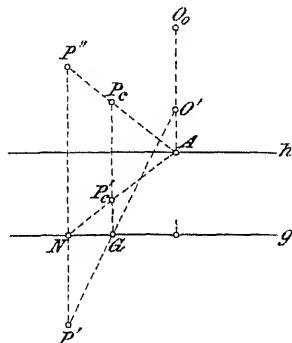


Fig. 80.

$D$ ; ihre Bilder  $NA$  und  $MD$  schneiden sich im Bilde  $P'_c$  des Grundrisses  $P'$ . Das Bild von  $PP'$  geht vertikal durch  $P_c$ , das Bild von  $PP''$  ist  $P''A$ ; ihr Schnittpunkt  $P_c$  ist folglich die Perspektive von  $P$  (Fig. 79).

$\beta$ ) Die Vertikalebene durch  $OF$  schneidet  $\Pi_1$  in  $O'P'$  und  $\Pi$  in der Vertikalen durch  $G = g \times O'P'$ , die auf  $P''A$  das Bild  $P_c$  bestimmt.  $P_c$  wird wieder auf  $NA$  gefunden (Fig. 80).

$\gamma$ ) Trägt man auf die Vertikale  $P''P'$  den zweiten Tafelabstand des Punktes als  $P''P_0 = NP'$  auf, legt also  $P''P$  als  $P''P_0 \parallel AO_0$  in die Bildebene um, so liegt  $P_c$  auf  $O_0P_0$  (vgl. 80). Man findet also  $P_c$ , wenn man die Vertikale durch  $G = g \times O'P'$  mit  $O_0P_0$

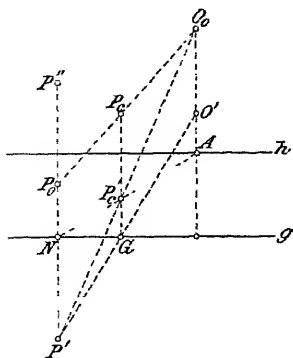


Fig. 81.

schneidet. Speziell findet man  $P_c$  auf derselben Vertikalen und auf  $O_0P'$  (Fig. 81). Handelt es sich nur um die Bestimmung von  $P_c$ , so ergibt sich  $P_c$  als Schnittpunkt von  $P_0O_0$  mit  $P''A$ .

Zweitens: bei schräger Ansicht.

$\delta$ ) Eine in  $\Pi_1$  beliebig durch  $P'$  gezogene Gerade  $m$  habe das Bild  $MM_\infty$  ( $M = m \times g$ ,  $M_\infty$  auf  $h$ ,  $O_0M_\infty \parallel m$ ), so ist  $P'_c = MM_\infty \times O_0P'$ . Zieht man  $MQ \parallel P'P$ , also  $\perp g$  und  $\perp (P'' \mid g)$ , so ist  $M_\infty Q$  das Bild von  $PQ \parallel m$  und geht durch  $P_c$  (Fig. 82).

ε) Das Bild der zu  $\Pi_2$  normalen Linie  $PP''$  geht durch den Fluchtpunkt  $N_\infty (= V_\infty)$  der Normalen von  $\Pi_2$ ; andererseits liegt es in der Ebene  $OPP''$ , die auch  $O''$  enthält und die  $z$ -Achse in  $H = O''P'' \times z$  trifft; folglich ist  $HN_\infty = P_cP_c''$  dieses Bild (80). Auf ihm wird  $P_c$  mittels der Vertikalen durch  $G = O'P' \times g$  bestimmt (Fig 83).

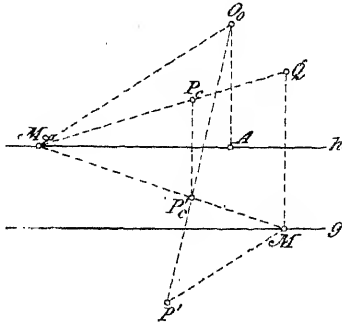


Fig. 82.

Die unter β) bzw. ε) genannten Methoden sind die einfachsten. Bei β) hat man drei, bei ε) vier gerade Linien zu ziehen. Das eine Verfahren geht aus dem anderen hervor, wenn man  $\Pi_2$  mit  $\Pi_1$ , folglich  $g$  mit  $z$ , sowie  $O''$  und  $N_\infty$  mit  $A$  zusammenfallen läßt. Die Konstruktion ε) läßt sich auch durch einen mechanischen Apparat (Perspektograph) ausführen, denn werden  $P$  und demgemäß  $P', P''$  bewegt, so drehen sich die Geraden  $O'P', O''P''$  um die festen Punkte  $O'$  bzw.  $O''$  und führen die Punkte  $G, H$  auf den festen Geraden  $g$  bzw.  $z$ ; die vertikale Gerade wird zu sich selbst parallel verschoben und die Gerade  $HP_c$  dreht sich um den festen Punkt  $N_\infty$ .

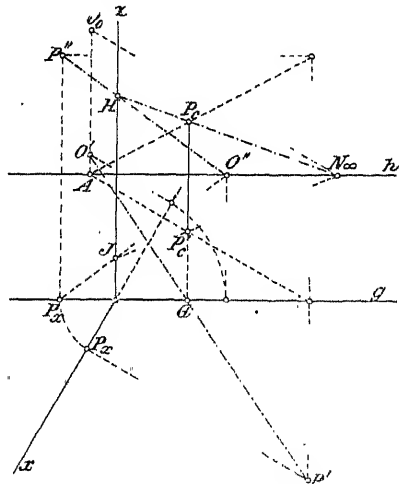


Fig. 83.

94. Das Bild einer geraden Linie ist durch die Bilder zweier ihrer Punkte bestimmt. Aber je kürzer die von ihnen begrenzte Strecke ausfällt, desto weniger genau ergibt sich die Richtung der Bildgeraden. Man ermittelt daher besser zuerst ihren Fluchtpunkt. Hierdurch wird nicht allein die Genauigkeit der Zeichnung erhöht, sondern auch Mühe erspart, denn an den Objekten treten oft zahlreiche parallele Linien auf, deren Bilder nach demselben Fluchtpunkte laufen.

Der Fluchtpunkt einer Geraden ist die Bildspur  $J_\infty$  des zu ihr

parallelen Sehstrahles  $OJ_\infty = i$ . Fällt  $\Pi_2$  mit  $\Pi$ , also  $x$  mit  $g$  zusammen, so zieht man Grund- und Aufriß des Sehstrahles durch Grund- und Aufriß des Auges, d. h.  $i'$  durch  $O'$  und  $i''$  durch  $A$  (Fig. 84). Die Vertikale durch  $J' = i \times g$  trifft  $i''$  in  $J_\infty$  und den Horizont  $h$  in dem Fluchtpunkte  $J'_\infty$  der Horizontalprojektion der Geraden. — Liegt  $\Pi_2$  gegen  $\Pi$  geneigt, so zeichne man die Fluchtlinie  $z_\infty$  ( $\parallel z$ ) von  $\Pi_2$ , lege  $O$  um  $z_\infty$  nach  $O_A$  um und bestimme  $Y_\infty$ . Die Parallele zu  $i''$  durch  $O_A$  schneidet dann  $z_\infty$  im Fluchtpunkte von  $i''$ ; seine Verbindungslinie mit  $Y_\infty$  aber bestimmt  $J_\infty$  auf der Vertikalen durch  $J'$  (vgl. 80).

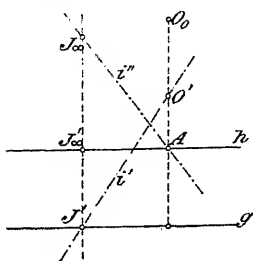


Fig. 84.

95. Wir erwähnen zwei besondere Arten von Fluchtpunkten die oft benutzt werden. Bei architektonischen Gegenständen stoßen häufig schräge Begrenzungsflächen von gleicher Neigung gegen die Grundebene in schrägen Kanten zusammen. Bei gerader Ansicht sind diese Kanten parallel zu den Diagonalen eines Würfels, dessen Kanten parallel und senkrecht zu  $\Pi$  und  $\Pi_1$  liegen, oder parallel zu den Diagonalen einer ebenso gestellten quadratischen Säule. In dem ersten Falle sind ihre Fluchtpunkte die Ecken  $B_1, B_2, B_3, B_4$  des dem Distanzkreise umgeschriebenen Quadrates mit je zwei horizontalen und vertikalen Seiten (vgl. Fig. 78); im anderen Falle liegen die Fluchtpunkte  $C_1, C_2, C_3, C_4$  auf den Vertikalen durch die Distanzpunkte  $D$  und  $D_1$  und auf den beiden Geraden, die durch  $A$  parallel zu den Aufrissen gezogen sind. Bei schräger Ansicht hat man das vorhin angegebene Verfahren zur Bestimmung der Fluchtpunkte einzuschlagen.

96. Sieht man von der Grundebene  $\Pi_1$  ab, deren Spur- und Fluchtlinie als  $g$  und  $h$  stets angegeben werden müssen, so kommt die Darstellung einer Ebene durch Spur- und Fluchtlinie in der angewandten Perspektive nicht vor. Wohl aber werden diese Elemente zu konstruktiven Zwecken gebraucht. Bei vielen Gegenständen ist es zweckmäßig, von vornherein die Fluchtlinien zu bestimmen: erstens für die Frontebenen und zweitens für die Diagonalebene, welche die von jenen gebildeten rechten Winkel halbieren.

97. Im II. Kapitel sind die Grundaufgaben der darstellenden Geometrie durch Zentralprojektion gelöst worden. Wir haben daher hier nur wenige Aufgaben mit Bezug auf die besondere Art zu

besprechen, in der sie am häufigsten angewandt werden. Sie betreffen:

1. die Teilung vertikaler und horizontaler Strecken, sowie in Verbindung hiermit
2. die ähnliche Verkleinerung der Zeichnung durch Reduktion der Distanz,
3. die Darstellung von Kreisen und Ellipsen in horizontalen oder vertikalen Ebenen,
4. die Schattenkonstruktion.

98. Die Teilung einer zur Bildebene parallelen, also speziell jeder vertikalen Strecke erfolgt im Bilde nach demselben Verhältnis wie im Original. Um sie auszuführen, muß das Bild einer Teilstrecke bekannt sein. Ist auf einer Vertikalen vom Punkte  $P$  aus die Strecke  $PQ$  abzutragen, so ziehe man durch das Bild  $R_c$  ihres Grundspurpunktes  $R$  eine beliebige Gerade, die  $g$  in  $S$  und  $h$  in  $M_\infty$  schneiden mag, errichte in  $S$  die Vertikale und schneide sie mit  $M_\infty P_c$  in  $M$  (Fig. 85); dann ist  $SMPR$  ein Rechteck und  $SM$  die wahre Länge von  $RP$ . Macht man  $MN$  auf  $SM$  der wahren Länge von  $PQ$  gleich, so geht  $NM_\infty$  durch  $Q_c$ .

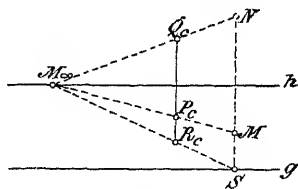


Fig. 85.

99. Die Teilung einer horizontalen Strecke erfolgt nach 67. Seien  $M$  und  $M_\infty$  Spur- und Fluchtpunkt einer in  $\Pi_1$  liegenden Geraden  $m$ , welche die Strecke  $PQ$  trägt. Dreht man  $m$  und  $M_\infty O_0$  um  $M$  bzw.  $M_\infty$  in gleichem Sinne, bis sie mit  $g$  bzw.  $h$  zusammenfallen, so gelangen die Punkte  $P, Q$  und  $O_0$  in die Lagen  $P_A, Q_A$  und  $O_A$  (Fig. 86) und die Geraden  $O_A P_A, O_A Q_A$  schneiden  $m_c = MM_\infty$  in den gesuchten Punkten  $P_c, Q_c$ . Hierbei heißt  $O_A$  der Teilungspunkt der Geraden  $m$  und aller ihrer Parallelen. Legt man nämlich eine solche Horizontale um ihren Spurpunkt in die Bildebene parallel zu  $h$  um, so treffen die von  $O_A$  nach den Punkten der umgelegten Geraden gezogenen Strahlen die Bildgerade in den zugehörigen Bildpunkten.

100. In den Anwendungen tritt es oft ein, daß einer oder mehrere der Punkte, die zur Konstruktion nötig sind, außerhalb der Zeichenfläche liegen. Man hilft sich dann durch eine Reduktion, d. h. durch eine ähnliche Verkleinerung der Zeichnung, wie sie sich ergeben würde, wenn man bei ungeändertem Objekt und Auge die Bildebene zu sich parallel in der Richtung  $AO$  verschiebt und hierdurch die ursprüngliche Distanz auf ihren  $n^{\text{ten}}$  Teil reduziert.



Ist  $O_A$  unzugänglich, so mache man auf  $h$  die Strecke  $M_\infty T = \frac{1}{n} \cdot M_\infty O_A = M_\infty^r O_A^r$  und auf  $g$  zugleich  $MR = \frac{1}{n} \cdot MP$  und  $MS = \frac{1}{n} \cdot MQ$ , so gehen  $TR$  und  $TS$  offenbar wieder durch  $P_c$  und  $Q_c$ . Kann hierbei  $M_\infty$  nicht gezeichnet werden, so mache man zuerst  $M_\infty^r T^r = \frac{1}{n} \cdot M_\infty^r O_A^r$  und dann  $AT = n \cdot AT^r$ . Ist endlich auch  $M$  nicht benutzbar, so bedient man sich der reduzierten Grundlinie, die man parallel zu  $h$  in dem Abstand  $= \frac{1}{n} \cdot (g \perp h)$  zieht; auf ihr findet man den reduzierten Spurpunkt  $M^r$ , indem man in dem Abstand  $= \frac{1}{n} \cdot (A \perp m)$  von  $A$  die Linie  $m^r \parallel m$  zieht. Die weitere Konstruktion gründet sich auf die perspektiv-ähnliche Beziehung zwischen den gegebenen Elementen und den reduzierten wie umgekehrt zwischen den hieraus gefundenen und den gesuchten Elementen.

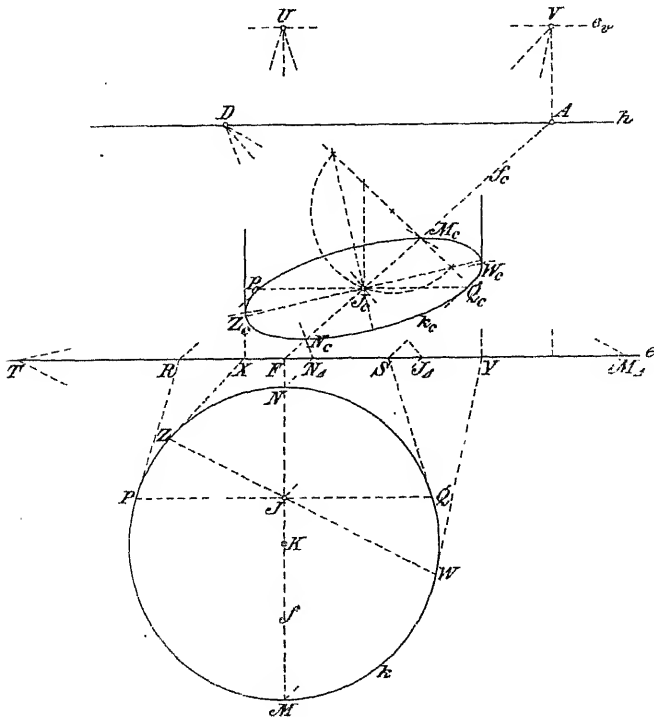


Fig. 87.

**101.** Abbildung eines horizontalen Kreises (Fig. 87). Die Ebene  $E$  des Kreises  $k$  hat den Horizont  $h$  zur Fluchtlinie, die Spur  $e$  und die Verschwindungslinie  $e_v$  sind zu  $h$  parallel. Der Abstand  $(e \perp h)$  hängt von der Lage der Ebene  $E$  ab, der Abstand  $(e_v \perp e)$  ist

gleich der Distanz ( $O_0 \rightarrow h$ ). Wir betrachten nur den gewöhnlichen Fall, wo der Kreis  $k$  die Verschwindungslinie  $e_v$  nicht trifft, sein Bild also eine Ellipse wird. Der Kreis sei durch seine Umlegung um  $e$  gegeben. Die Umlegungen seiner Elemente werden ebenso wie diese selbst bezeichnet.  $K$  sei der Mittelpunkt und  $MN$  auf  $f$  der zu  $e$  rechtwinklige Durchmesser; sein Bild  $M_c N_c$  findet man auf  $f_c = FA$  nach 83. Ist  $J_c$  der Mittelpunkt von  $M_c N_c$  und liegt der Punkt  $J$  auf  $MN$  zu  $J_c$  perspektiv, so entspricht umgekehrt der zu  $e$  parallelen Kreissehne  $PQ$  durch  $J$  der zu  $M_c N_c$  konjugierte Durchmesser  $P_c Q_c$  ( $\parallel e$  durch  $J_c$ ) der Bildellipse  $k_c$ . Ist  $U = f \times e_v$  und schneiden die Kreistangenten  $UP, UQ$  die Spur  $e$  in  $R, S$ , so sind ihre Bilder  $RP_c$  und  $SQ_c$  parallel zu  $f_c$ . Durch die konjugierten Durchmesser  $M_c N_c$  und  $P_c Q_c$  ist die Ellipse  $k_c$  bestimmt; ihre Achsen können nach 22 Bd. I gefunden werden. Die vertikalen Tangenten der Ellipse (die z. B. als Umrisslinien einer über dem Grundkreise  $k$  stehenden runden Säule öfters gezeichnet werden müssen) entsprechen den Tangenten des Kreises  $k$  aus dem Punkte  $V = A O_0 \times e_v$  und gehen durch deren Schnittpunkte  $X, Y$  mit der Spurlinie  $e$ . Sind  $W, Z$  die Berührungspunkte der Kreistangenten und ist  $T = e \times WZ$ , so liegen die Berührungspunkte  $W_c, Z_c$  der Ellipsentangenten auf dem Durchmesser  $TJ_c$ . Häufig benutzt man zur Abbildung des horizontalen Kreises  $k$  ein ihm umschriebenes Polygon, z. B. ein regelmäßiges Achteck, dessen Seiten zu  $g$  teils parallel, teils senkrecht, teils unter  $45^\circ$  geneigt sind. Die Fluchtpunkte seiner Seiten sind bez. der unendlich ferne Punkt von  $h$ , der Hauptpunkt  $A$  und die beiden Distanzpunkte  $D, D_1$ . Die Seiten bilden zwei dem Kreise  $k$  umgeschriebene Quadrate, deren Diagonalen den Seiten des Achtecks parallel laufen und ihre Berührungspunkte mit  $k$  bestimmen. Die Abbildung der geschilderten Figur ergibt demnach acht Punkte der Bildellipse nebst den zugehörigen Tangenten. Die Einzelheiten der Konstruktion ergeben sich bei ihrer Ausführung ohne Schwierigkeit.

**102.** Die Abbildung einer Ellipse mit vertikaler Achse (bez. eines vertikalen Kreises), die z. B. als Gewölblinie vorkommen kann, ergibt sich aus 101. An Stelle der Horizontalen  $e, e_v, h$  treten die Vertikalen  $n, n_v, n_\infty$  als Spur-, Verschwindungs- und Fluchtlinie der vertikalen Ebene, die die abzubildende Kurve enthält. Ferner tritt an Stelle der Geraden  $f$  die horizontale Achse der Ellipse (oder der horizontale Kreisdurchmesser), an Stelle von  $O_0$  das um  $n_\infty$  in die Bildebene umgelegte Auge  $O^0$  und statt des Distanzpunktes  $D$  hat man das um  $F_\infty$  auf  $n_\infty$  niedergedrehte





dem Horizont, oder ein unendliches fernes, oder ein virtuelles unter dem Horizont, je nachdem die Sonne im Angesicht des Beschauers, oder in der Verschwindungsebene, oder im Rücken des Beschauers steht. Demgemäß läuft der Grundschatte einer von der Grundfläche aufsteigenden Vertikalen entweder auf den Beschauer zu, oder parallel zu  $h$ , oder nach dem Horizonte hin.  $L_c$  ist der Fluchtpunkt der Lichtstrahlen,  $L'_c$  liegt auf dem Horizont und ist der Fluchtpunkt ihrer Horizontalprojektionen.

Der Gang der Konstruktionen zur Abbildung der Schatten ist bei der Zentralperspektive derselbe wie bei der Parallelprojektion. Man bestimmt zuerst die Lichtgrenzen auf dem Objekt, dann die Schlagschattengrenzen in der Grundebene und zuletzt die Schlagschatten auf dem Objekte selbst, wie dies die nachfolgenden Beispiele zeigen.

**104.** Ist ein Punkt  $P$  durch  $P_c$  und  $P'_c$  gegeben, so findet man das Bild seines Grundschatte  $P_*$  als  $P_{*c} = L_c P_c \times L'_c P'_c$ ;  $l_c = P_c P_{*c}$  ist das Bild eines Lichtstrahles  $l$ ,  $l'_c = P'_c P_{*c}$  ist das Bild seines Grundrisses  $l'$  und zugleich der Grundschatte der Vertikalen  $P'P$ . Ebenso wie wir hier den Grundschatte der Vertikalen durch  $P$  benutzen, um auf ihm den des Punktes  $P$  selbst zu finden, geht man bei der Ermittlung des Schatte von  $P$  auf eine beliebig gegebene Ebene  $E$  von einer geeigneten Geraden durch  $P$  (meist einer Vertikalen oder Horizontalen) und ihrem Schatten auf  $E$  aus; dieser ist schließlich mit dem Lichtstrahle durch  $P$  zu schneiden.

Sind von einer Geraden  $i$  Spur- und Fluchtpunkt  $J, J_\infty$  und von der Ebene  $E$  Spur- und Fluchtlinie  $e, e_\infty$  bekannt, so sucht man Spur- und Fluchtlinie  $d, d_\infty$  der durch  $i$  gelegten Lichtstrahlen-ebene  $\Delta$ , die  $E$  in dem gesuchten Schatten  $i^*$  schneidet, und erhält von  $i^*$  den Spur- und Fluchtpunkt, hieraus aber das Bild ( $J^* = d \times e, J_\infty^* = d_\infty \times e_\infty, i_c^* = J^* J_\infty^*$ ). Bei Parallelbeleuchtung verbindet die Fluchtlinie  $d_\infty$  den Fluchtpunkt  $L_c$  der Lichtstrahlen mit dem Fluchtpunkte  $J_\infty$  der Geraden  $i$ , und  $d$  geht parallel zu  $d_\infty$  durch  $J$ .

### Anwendungen der Perspektive.

**105.** Wir legen die Regeln der Perspektive in ihrer Anwendung auf einige architektonische Gegenstände dar. Die Objekte sollen die hauptsächlichsten an Bauwerken vorkommenden Formen und Anordnungen der Glieder zeigen, aber nur in möglichst einfacher Weise, so daß sie leicht geometrisch bestimmt werden können. Bei

der Wahl ihrer Verhältnisse sind weniger ästhetische Gesichtspunkte wirksam gewesen, als vielmehr die Rücksicht darauf, daß die Einzelheiten der Konstruktion in der Zeichnung genügend erkennbar werden müssen. — Zuerst behandeln wir nur Körper mit ebenen

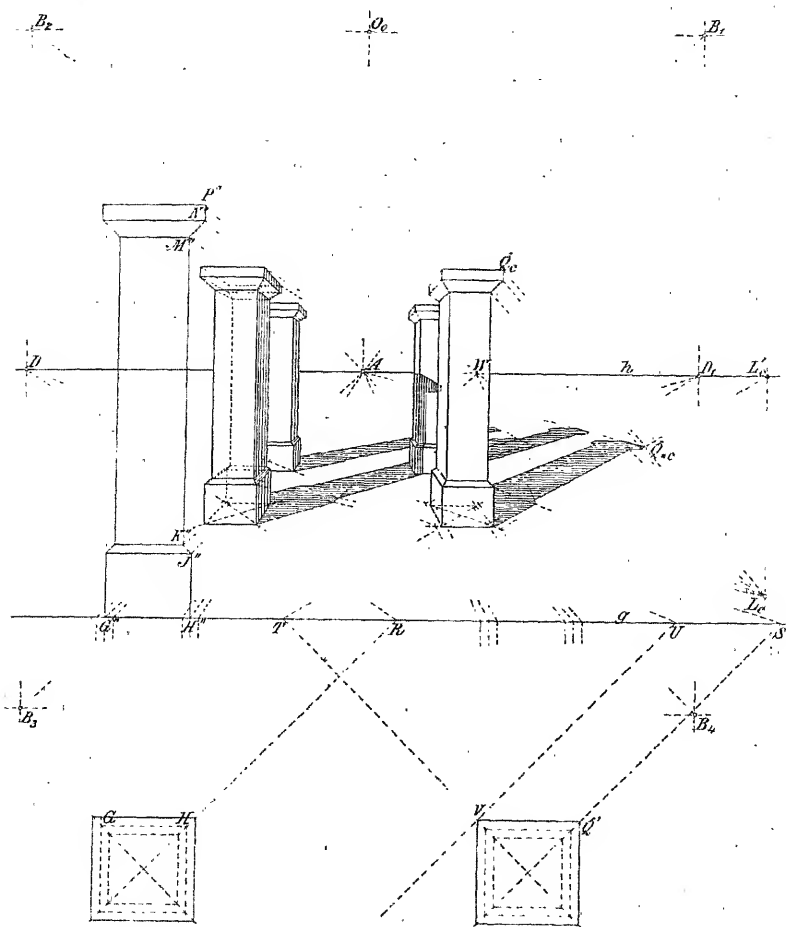


Fig. 89.

Seitenflächen, in den späteren Beispielen treten auch krumme Flächen auf.

Perspektive eines Säulenganges in gerader Ansicht (Fig. 89). Die doppelte Säulenreihe erstreckt sich in der zur Bildebene senkrechten Richtung nach dem Horizonte hin. Jede einzelne Säule besteht aus Sockel, Schaft und Kapitäl. Diese drei

Teile werden von quadratischen Prismen und abgestumpften quadratischen Pyramiden gebildet. Die Prismenflächen stehen vertikal, die schrägen Pyramidenflächen, die am Sockel oben, am Kapital unten liegen, sind gegen die Grundebene  $\Pi_1$  unter  $45^\circ$  geneigt. — Die Säulenabstände in der Richtung parallel zur Grundlinie  $g$  ergeben sich aus dem Grundriß des vordersten Säulenpaares; zur Feststellung der Abstände in der Richtung senkrecht zu  $g$  genügt es, die verlängerte Grundrißdiagonale  $VU$  einer Säule des folgenden Paares zu zeichnen. Die Kanten der Säulen verlaufen in sieben verschiedenen Richtungen: sie sind nämlich entweder vertikal, oder normal zur Bildebene, oder parallel zur Grundlinie, oder parallel zu einer der vier Diagonalen eines Würfels, von dem zwei Seitenflächen in  $\Pi$  und  $\Pi_1$  liegen. Ihre Fluchtpunkte sind folglich der Reihe nach: der unendlich ferne Punkt der Vertikalen, der Hauptpunkt  $A$ , der unendlich ferne Punkt des Horizontes  $h$  und die Ecken  $B_1, B_2, B_3, B_4$  des dem Distanzkreis umgeschriebenen Quadrates. ( $B_1 B_2 \parallel g$  durch  $O_0$ ,  $O_0 B_1 = O_0 B_2 = A O_0$ ). Die erreichbaren Spurpunkte der Grundrißdiagonalen auf  $g$  sind durch  $R, S, T, U$  bezeichnet; ihre Fluchtpunkte sind die Distanzpunkte  $D$  bzw.  $D_1$ .

Wir beginnen mit der Abbildung der Sockelgrundflächen. Zu ihren Ecken gehören z. B. die Punkte  $G, H$ ; ihre Bilder werden gefunden, wenn man  $G''$  und  $H''$  mit  $A$  und den Spurpunkt  $R$  der durch  $H$  gelegten Diagonale mit  $D$  verbindet, sowie durch  $H_c$  die Parallele zu  $g$  zieht ( $H_c = AH'' \times DR$ ,  $G_c$  auf  $G''A$ ,  $H_c G_c \parallel g$ ). Hat man in dieser Weise alle in  $\Pi_1$  liegenden Quadrate abgebildet (und kontrolliert, daß ihre je in einer Parallelen zu  $g$  gelegenen Seiten gleiche Längen haben), so zieht man durch alle ihre Ecken vertikale Linien aufwärts. Diese stellen die vertikalen Sockelkanten dar; ihre oberen Endpunkte bestimmen wieder horizontale Quadrate. Im Bilde liegt eine Reihe ihrer Ecken auf  $J''A$ ; zieht man durch sie Parallele zu  $g$ , so findet man die übrigen Ecken, die zugleich auf drei weiteren Geraden durch  $A$  liegen müssen. Jetzt sind die Bilder der schrägen Sockelkanten zu ziehen; sie laufen von den vorderen Ecken nach  $B_1$  bzw.  $B_2$ , von den hinteren nach  $B_3$  bzw.  $B_4$ . Eine Reihe ihrer Endpunkte liegt auf  $K''A$ , die übrigen finden sich wie vorhin. Nunmehr werden die vertikalen Schaftkanten gezogen, die auf  $M''A$ , usw. endigen. Die schrägen Kapitalkanten laufen vorn nach  $B_3$  bzw.  $B_4$ , hinten nach  $B_1$  bzw.  $B_2$ ; ihre Endpunkte liegen auf  $N''A$ , usw. Man zeichnet ferner die vertikalen Kapitalkanten, deren Endpunkte sich auf  $P''A$ , usw. befinden. Zuletzt

sind die Bilder aller horizontalen Kanten auszuziehen, die unsere Konstruktion bereits als Hilfslinien benutzt hat. — Welche Linien sichtbar sind und welche nicht, wird der Zeichner leicht auch ohne nähere Erklärung beurteilen.

Hierauf bestimmen wir die Grundschaten, und um dies leicht ausführen zu können, haben wir wenigstens für die vordersten Säulen die Grundrißbilder aller Eckpunkte angegeben. Wir wählen Parallelbeleuchtung; das (virtuelle) Sonnenbild  $L_c$  liegt unter dem Horizonte  $h$ , der Fluchtpunkt  $L'_c$  der Lichtstrahlgrundrisse senkrecht darüber auf  $h$  selbst. Die Lichtgrenze setzt sich bei jeder Säule aus 14 Kanten zusammen; zwei davon liegen in der Grundfläche, zwei andere in der horizontalen Endfläche des Kapitāls, die übrigen sind in der Diagonalebene mit der Fluchtlinie  $B_2 B_3$  enthalten. Zur Lichtgrenze gehören die Ecken, in denen das Bild bzw. Grundrißbild eines Lichtstrahles das der Säule streift. — Die Grundschaten der Ecken, z. B.  $Q$ , stellt man durch  $Q_{*c} = Q_c L_c \times Q'_c L'_c$  dar, usw. Die Grundschaten der horizontalen Kanten sind zu diesen parallel, ihre Bilder laufen folglich parallel zu  $h$  oder nach dem Hauptpunkte  $A$ . Die Grundschaten der Vertikalen konvergieren im Bilde nach  $L'_c$ , die der schrägen Kanten haben die Fluchtpunkte  $W = h \times B_2 L_c$  und  $W_1 = h \times B_3 L_c$  (in der Figur konnte nur  $W$  angegeben werden). Diese Angaben genügen zur Verzeichnung aller Schlagschaten auf die Bodenfläche.

In unserem Beispiele kommt der Schlagschatten einer Säule auf eine zweite vor (ihre Grundschaten überdecken sich zum Teil). Zieht man aus dem Kreuzungspunkte der Grundschaten zweier Kanten rückwärts bis zu der beschatteten Kante einen Lichtstrahl, so endigt er in einer Ecke der Schlagschattenfigur. Aber nicht alle Ecken derselben können so gefunden werden, man hat vielmehr das in 104 geschilderte Verfahren anzuwenden. Hierbei beachte man folgende Bemerkungen. Der Schatten einer Geraden auf eine zu ihr parallele Ebene ist zu ihr selbst parallel; im Bilde haben beide denselben Fluchtpunkt. Hiernach sind z. B. die Schatten einer vertikalen Kante auf die senkrechten Flächen einer Säule selbst vertikal und das Schattenbild einer zu  $\Pi$  normalen Kante auf die zu ihr parallele Seitenfläche eines Säulenschaftes geht durch  $A$ . Ferner wird der Schatten, den eine Gerade auf eine Parallelebene zu  $\Pi$  (mit unendlich ferner Fluchtlinie) wirft, als Parallele zur Verbindungslinie ihres Fluchtpunktes mit dem der Lichtstrahlen dargestellt. Folglich hat der Schatten einer zu  $\Pi$  normalen Kante auf eine Frontfläche ein zu  $AL_c$  paralleles Bild, und analog bildet sich der Schatten einer

schrägen Kante ( $MN$ ) mit dem Fluchtpunkte  $B_3$  als Parallele zu  $B_3 L_c$  ab. Der Schatten von  $KK$  auf die schiefe Sockelfläche hat seinen Fluchtpunkt in  $B_1 B_2 \times L_c L'_c$ . Die Begrenzungslinien des Schattens der einen Säule auf den Boden und auf die andere Säule treffen in den Bodenkanten der letzteren zusammen; um die Treffpunkte exakt zu bestimmen, kann man sie zuerst im Grundriß konstruieren und dann in die Perspektive übertragen.

Bei der Ausführung der Zeichnung wird man bemerken, daß sich ihre Genauigkeit dadurch erhöhen läßt, daß man zur Bestimmung eines und desselben Elementes verschiedene Wege einschlägt.

**106.** Perspektive eines Obelisken mit Unterbau in schräger Ansicht. Der Unterbau hat eine quadratische Basis; von ihren vier Seitenflächen führen Stufen nach einem Podest, der vier durch Eckquader gebildete Vorsprünge zeigt. Über dem Podest erhebt sich der quadratische Obelisk auf einer Plinthe mit oben abgeschrägten Seitenflächen. Die schrägen Flächen der Plinthe und die in der Spitze  $S$  zusammenstoßenden Endflächen des Obelisken sind gegen  $\Pi_1$  unter  $45^\circ$  geneigt. Die Seitenflächen des Obelisken schneiden sich in dem Punkte  $U$  seiner vertikalen Achse, die schrägen Flächen der Plinthe in dem Punkte  $Q$ ; alle übrigen Flächen sind entweder horizontal oder vertikal. Die einzelnen Bestimmungsstücke des Objektes entnimmt man aus dem Grund- und Aufriß desselben, der dem perspektiven Bilde (Fig. 90) in halber Größe beigefügt ist.

Nach Annahme von  $A, g, h$  wird die Lage des Objektes durch seinen umgelegten Grundriß bestimmt; das Basisquadrat ist gegen die Grundlinie  $g$  geneigt. Die Distanz  $AO$ , die so groß gewählt ist, daß das umgelegte Auge  $O_0$  in die Figur nicht eingetragen werden kann, reduziert man auf die Hälfte und benutzt das reduzierte umgelegte Auge  $O_0^r$  ( $AO_0^r = \frac{1}{2} AO$ ). Die Seiten  $m = EF$  und  $n = EH$  des Basisquadrates (sowie alle zu ihnen parallelen Kanten) haben die Fluchtpunkte  $M_\infty$  resp.  $N_\infty$  auf  $h$ . Man findet zuerst die reduzierten Punkte  $M_\infty^r$  und  $N_\infty^r$  ( $O_0^r M_\infty^r \parallel m$ ,  $O_0^r N_\infty^r \parallel n$ ) und hieraus  $N_\infty$  durch die Beziehung  $AN_\infty = 2 \cdot AN_\infty^r$ , während  $M_\infty$  unzugänglich ist. Seien nun  $M = m \times g$  und  $N = n \times g$  die Spurpunkte, so kann das Bild  $n_c = NN_\infty$  direkt gezeichnet werden; für  $m$  aber muß zuvor auf  $AM$  der reduzierte Spurpunkt  $M^r$  ( $AM^r = \frac{1}{2} AM$ ) bestimmt werden; hierauf ist  $m_c$  durch  $M$  parallel zum reduzierten Bilde  $m_c^r = M^r M_\infty^r$  zu ziehen. Auf  $h$  trägt man  $M_\infty^r O_0^r = M_\infty^r O_0^r$



Punktes  $F_A$  bestimmt man  $F_A^r (MF_A^r = \frac{1}{2} MF)$ , macht  $M_\infty^r T^r$   $\frac{1}{2} M_\infty^r O_A^r$ ,  $AT = 2 \cdot AT^r$  und findet  $F_c$  als  $MM_\infty \times F_A^r T$ , usf. I Bilder der Parallelen zu  $m$  gehen durch  $M_\infty$ , schneiden also  $N$  und jede dazu parallele Gerade in ähnlichen Punktreihen. Man trägt daher auf  $h$  die Strecke  $N_\infty^r M_\infty^r$  von  $N_\infty$  aus ab, ziehe durch ihr Endpunkt die Parallele zu  $NN_\infty$  und konstruiere auf ihr die Punktreihe, die aus der auf  $NN_\infty$  liegenden durch Verkleinerung auf  $h$  Hälfte entsteht. Übrigens richtet man es meist so ein, daß die oben benutzten Fluchtpunkte, wie hier  $M_\infty$ , noch auf das Zeichenbrett fallen oder man schraubt an dasselbe eine oder mehrere Leisten so an, daß man die Fluchtpunkte auf ihnen markieren kann. Das Bild des Basenzentrums  $C$ , von dem die Vertikalachse der Obeliskens aufsteigt, ergibt sich als Schnittpunkt der Diagonalen  $E_c G_c$  und  $F_c H_c$ . (In der Fig. sind nicht alle Bezeichnungen eingefügt, weil sie sonst undeutlich wären.) Die Diagonale  $EG$  hat den Spurpunkt  $D$  und den Fluchtpunkt  $L$  ( $O_0 D_\infty \parallel EG$ ); man bestimme auch ihren Teilungspunkt und benutze die Einteilung der Strecke  $E_c G_c$ , insbesondere ihre Schnittpunkte mit den nach unten verlängerten Obeliskensanten. Die Vertikale durch  $D$  bzw.  $D_\infty$  bilden Spur- und Fluchtlinie einer Diagonalebene des Objektes. Auf erstere trägt man von  $D$  aus die Höhen ab, in denen sich die Ecken und Kanten des Gegenstandes über der Grundebene befinden, verbindet die Endpunkte mit  $D_\infty$  und ermittelt so die Höhen im Bilde, z. B.  $DP_0 = E''P''$ ,  $F_c P_c \perp h$ ,  $P_0$  durch  $D_\infty$ , oder  $DS_0 = C''S''$ ,  $C_c S_c \perp h$ ,  $S_0 S_0$  durch  $D_\infty$ , usw. Für die Zeichnung der Stufenkanten ist es zweckmäßig, die Treppenprofile auf den Frontflächen des vordersten Eckquaders abzubilden. Von den Fluchtpunkten der schrägen Kanten an der Plinthe und an der Spitze des Obeliskens konnten nur zwei,  $R_1$  und  $R_2$ , angegeben werden, sie liegen auf der Vertikalen durch  $D_\infty$  symmetrisch zu  $h$ . Zeichne man die Aufrisse der Diagonalen des über dem Quadrate  $EEFG$  stehenden Würfels und zieht durch  $A$  Parallelen zu ihnen, so gehen sie durch die genannten Fluchtpunkte. An ihrer Stelle kann man auch das Bild des Punktes  $Q$  benutzen, in dem sich die schräge Kanten der Plinthe treffen. Ähnlich verfährt man bezüglich der im Punkte  $U$  der Vertikalachse zusammenlaufenden Kanten des Obeliskens. — Nach dem Gesagten hat es keine Schwierigkeit, das Bild des Objektes zu vollenden.

Der Schattenkonstruktion liegt die Annahme paralleler Lichtstrahlen zugrunde. Die Sonne befindet sich im Gesichtsfeld des Beschauers; ihr reelles Bild  $L_c$  also über dem Horizont und  $L_c$  senkrecht darunter auf  $h$ . Die Lichtstrahlen kommen von  $L_c$ , die

Schatten der Vertikalen auf Horizontalflächen von  $L'_c$ . Die Schatten horizontaler Kanten auf horizontalen Flächen gehen durch  $M_\infty$  oder  $N_\infty$ . Ferner kommen Schatten horizontaler Kanten (mit dem Fluchtpunkte  $M_\infty$ ) auf vertikale Flächen (mit der Fluchtlinie  $N_\infty V \perp h$ ) vor; ihr Fluchtpunkt  $V$  liegt auf  $M_\infty L_c$ . Die schrägen Kanten werfen nur auf wagrechte Flächen Schatten; man ermittelt sie aus den Durchstoßpunkten mit der Grundebene und dem Podest und den bezüglichen Schatten der Punkte  $Q, S, U$ . Die Fluchtpunkte dieser Schattenlinien liegen auf  $h$  mit  $L_c$  und den Fluchtpunkten der bez. Kanten in gerader Linie. Sind letztere nicht erreichbar, so muß man von anderen Punkten der Kanten die Schatten abbilden. Die Linien, welche die Lichtgrenze auf dem Objekte zusammensetzen, lassen sich sehr einfach feststellen. Zu ihnen gehören beim Obelisk und den vier Eckquadrern die in den Diagonalebenen mit der Fluchtlinie  $D_\infty R_1$  gelegenen Kanten, bei der Plinthe zwei vertikale, zwei horizontale und zwei schräge Kanten, außerdem bei jedem Eckstein zwei Oberkanten und zwei oberste Treppenkanten.

107. Als weiteres Beispiel wählen wir die schräge Ansicht einer gewölbten Halle mit doppeltem Durchgang. (Fig. 91. In dieser und in den beiden folgenden Figuren ist der untere Index  $c$ , der zur Bezeichnung der perspektiven Bilder dient, weggelassen.) Der quadratische Bau zeigt ein von vier ebenfalls quadratischen Pfeilern getragenes Kreuzgewölbe. Die Wölbflächen liegen auf zwei kongruenten Rotationszylindern, deren horizontale Achsen sich rechtwinklig schneiden; sie endigen in jeder Front mit einem Halbkreis und stoßen in zwei (sich in  $T$  kreuzenden) Gratlinien zusammen, die den Diagonalebenen angehören und mithin Halbellipsen sind. An den vier Fronten läuft oben ein einfaches Kranzgesims; seine schrägen Kanten sind zu den Diagonalen eines Würfels parallel, dessen Seitenflächen in den Fronten liegen.

Die Bildebene legen wir durch die vorderste Pfeilerkante  $z$ , machen zwei Seiten des Basisquadrates zur  $x$ - und  $y$ -Achse und die darüberstehenden Frontebenen mithin zur Aufriß- bzw. Seitenrißebene. Von dem Grund- und Aufriß ist nur so viel gezeichnet, als zur Bestimmung der Gestalt und Lage des Objektes gebraucht wird. Zur Festlegung der Distanz ist das reduzierte umgelegte Auge angegeben ( $A O_0^r = \frac{1}{4} A O$ ). Hieraus kann man die Fluchtpunkte  $X_\infty, Y_\infty, M_\infty, N_\infty$  der Achsen  $x, y$  und der Grundrißdiagonalen  $m, n$  finden. Die Abbildung aller geradlinigen Kanten des Gegenstandes erfolgt wie in 106 und bedarf nach dem Vorausgegangenen





vertikale Halbsehnenn durch die Bilder der Zentra  $K, J$ ; die Tangenten in ihren Endpunkten gehen durch  $X_\infty$  bzw.  $Y_\infty$ . Für die übrigen Gewölblinien vereinfacht sich das Verfahren, weil sie je mit einem der Kreise  $k, i$  auf einem Zylinder liegen. Den affin gelegenen ebenen Kurven des Originals entsprechen perspektiv gelegene im Bilde; die Fluchtpunkte ( $X_\infty, Y_\infty$ ) der Affinitätsstrahlen (Zylindermantellinien) werden die Zentra der Perspektivität, die Achsen sind die Bilder der Affinitätsachsen (in unserem Falle laufen sie vertikal durch  $Y_\infty, X_\infty, M, N$ , so daß Vertikalen stets Vertikale entsprechen). Auf Grund dieser Bemerkungen kann die Perspektive des Objektes leicht vervollständigt werden. Je drei perspektive Gewölblinien zeigen eine gemeinsame Tangente ( $s$  durch  $X_\infty, t$  durch  $Y_\infty$ ), die den scheinbaren Umriß einer Wölbfläche bildet.

Um die Darstellung des Objektes mit Schatten zu versehen, setzen wir Sonnenbeleuchtung voraus ( $L$  unterhalb  $h, L'$  auf  $h, LL' \perp h$ ). Über die Konstruktion der Schlagschatten, welche die geradlinigen Kanten auf die Grundebene und auf die ebenen Flächen des Objektes werfen, ist nichts Neues zu sagen (man vergleiche das vorangehende Beispiel). Die Lichtgrenzen der Wölbflächen sind Mantellinien; man erhält ihre Endpunkte auf den Fronthalbkreisen  $k$  und  $i$  nach 332 Bd. I, indem man die Schatten der Gewölbmantellinien auf die bez. Frontebene sucht und die zu ihnen parallelen Tangenten an  $k$  und  $i$  zieht. Diese sind hier mit dem Anriß  $l''$  bzw. Seitenriß  $l'''$  eines Lichtstrahles identisch. Nun ist  $X_\infty L$  die Fluchtlinie der Lichtebenen durch die Mantellinien der einen Wölbfläche und die Vertikale durch  $Y_\infty$  die Fluchtlinie der zugehörigen Frontebene (Seitenriß); der Schnittpunkt  $L_\infty'''$  beider ist der Fluchtpunkt der Schlagschatten ( $\parallel l'''$ ) jener Mantellinien. Also berührt die aus ihm an das Bild  $i$  gelegte Tangente dieses im Punkte  $R$  der Lichtgrenze. Ähnlich findet man  $P$  auf  $k$  mittels des Schnittpunktes  $L_\infty''$  von  $Y_\infty L$  mit der Vertikalen durch  $X_\infty$ . Die Konstruktion wird genauer, wenn man den um  $z$  umgelegten Kreis  $i''' = k''$  und das um  $Y_\infty L_\infty'''$  (bzw.  $X_\infty L_\infty''$ ) umgelegte Auge  $O_A$  (bzw.  $O^A$ ) auf  $h$  benutzt; eine zu  $L_\infty''' O_A$  parallele Tangente berührt  $i'''$  in  $R'''$  und  $R''' O_A$  geht durch das Bild  $R$ . Analoges gilt für  $P$ . Der Schlagschatten auf den Wölbflächen wird durch die Schatten der Fronthalbkreise  $k$  und  $i$  begrenzt, die in den Punkten  $P$  bzw.  $R$  beginnen und sich nach innen fortsetzen; ihre Tangenten in diesen Punkten lassen sich nach 375 Bd. I als vierte harmonische Strahlen finden. Die fraglichen Randschatten sind Ellipsenbogen (334 und 361 Bd. I). Man findet beliebig viele Punkte derselben aus der Bemerkung, daß eine Mantel-

linie durch den Randpunkt  $U$  ihren Schatten auf die Mantellinie durch den Randpunkt  $U_1$  wirft, wenn  $U''U_1'' \parallel L_\infty''O^A$  ist ( $U''O^A$  und  $U_1''O^A$  schneiden  $k$  in  $U$  und  $U_1$ ). Der Schnittpunkt des Lichtstrahles  $UL$  mit dem Bilde  $U_1I_\infty$  der zweiten Mantellinie stellt einen Punkt  $U^*$  des Randschattens dar, usw. Ein Teil  $VW$  des Fronthalbkreises  $k$  wirft Schatten auf den Schaft des rückwärts liegenden Pfeilers. Am Objekt selbst sind die Bogen  $VW$  und  $V^*W^*$  kongruent, da ihre Ebenen parallel stehen; im Bilde sind sie perspektiv (Zentrum  $L$ , Achse die Vertikale durch  $X_\infty$ ).  $W$  ist ein Endpunkt von  $k$  in  $W$  und  $W^*$  sind die Tangenten vertikal, während die Tangente in  $V$  und  $V^*$  sich auf der Vertikalen durch  $X_\infty$  schneiden. Um den Punkt  $V$  zu finden, zieht man durch den Fußpunkt der Kante, die  $V^*$  trägt, den Grundriß eines Lichtstrahles und schneidet ihn mit dem Grundriß des Halbkreises  $k$  in  $V'$ ; senkrecht über  $V'$  befindet sich  $V$  auf  $k$ . Von dem leicht bestimmbareren Grundschatten des Objektes ist nur wenig sichtbar; zu seiner Begrenzung gehört ein in  $V^*$  beginnender Ellipsenbogen als Schatten eines Teiles der Randlinie  $k$ .

**108.** Schräge Ansicht einer Nische (Fig. 92). An vertikaler Wand (Bodenkante  $w$ ) ist eine Nische angebracht, deren Basis eine wenig vorspringende rechteckige Platte bildet. Die Nischenfläche besteht aus zwei Teilen: einem geraden Zylinder über dem Grundhalbkreis  $f$ , der in dem Halbkreis  $c$  (Zentrum  $C$ ) endet, und einer anschließenden Viertelkugel mit dem Halbfrontkreis (Zentrum  $C$ ,  $CE$  vertikaler Halbmesser). Die Nischenfront tritt ein Stück aus der Wandfläche hervor; sie wird von zwei Halbsäulen (Pilastern) eingerahmt, die durch einen Architraven mit aufgesetztem Giebel verbunden sind. An den Kapitälern der Halbsäulen kommen Zylinderflächen vor, als deren Profilschnitt ein Viertelkreis angenommen wurde. Das Profil des Gesimses am Giebel ist geradlinig gewählt. Die Kanten des schräg aufsteigenden Gesimses (wie  $u$  und  $z$ ) treffen die entsprechenden horizontalen Kanten in den beiden Diagonalebene. — Die Bildebene ist durch die vorderste Kante der Basisplatte (unterste Frontkante  $MN$ ) gelegt, der Aufriß parallel zur Front gewählt und um  $z$  in  $\Pi$  umgelegt gezeichnet. Die Symbole  $x, y, X_\infty, Y_\infty, m, n, M_\infty, N_\infty$  haben dieselbe Bedeutung wie im vorigen Beispiel; durch  $J_\infty, K_\infty$  sind die Fluchtpunkte der Giebelkanten  $i = RS, k = ST$  bezeichnet. Das umgelegte Auge  $C$  konnte in der Figur nicht angegeben werden, sondern nur der reduzierte Punkt  $O_0^r (AO_0^r = \frac{1}{3}AO)$ ; mehrere der vorgenannten Fluchtpunkte sind ebenfalls unzugänglich. Statt der Fluchtpunkte der den Diagonalen

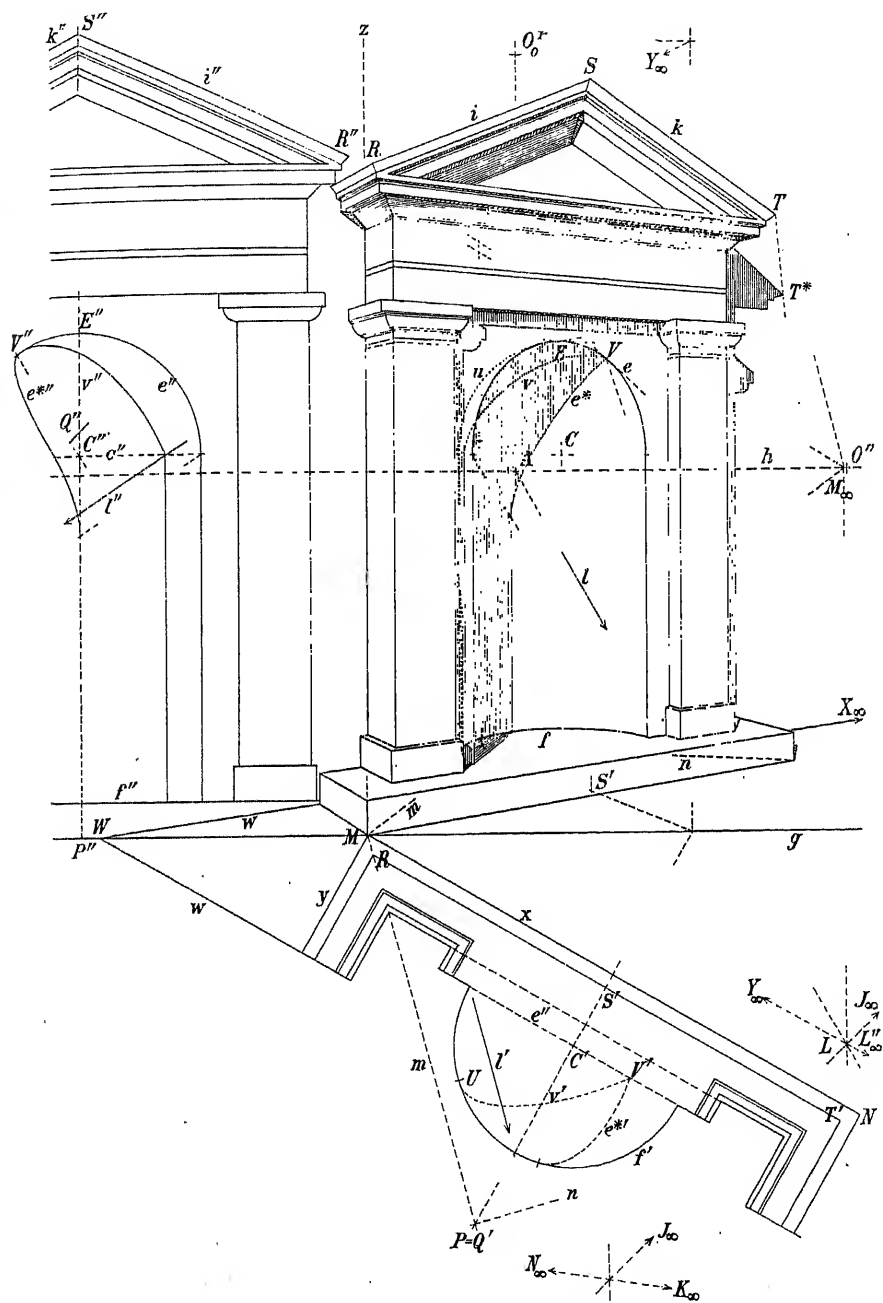


Fig. 92.

schnitten angehörigen schrägen Kanten des Gesimses wurde der Punkt  $Q$  der Vertikalachse  $C'C$  benutzt, in dem sie sich treffen.

Wir übergehen die Abbildung der geradlinigen Kanten des Objektes mit dem Hinweis auf das Vorausgegangene. Von den kleinen Ellipsenstücken, die in der Abbildung der Kapitäle auftreten, bestimmt man leicht die Endpunkte mit den zugehörigen Tangenten; eine dieser Tangenten hat jedesmal die vertikale Richtung, die andere läuft entweder durch  $N_\infty$  oder durch  $M_\infty$  oder durch  $N_\infty$ . Zur Verzeichnung der betreffenden Kurve genügt dann die Angabe eines Zwischenpunktes oder besser einer Tangente. Ebenso einfach gestaltet sich die Konstruktion der Schatten, welche die Halbsäulen, der Architrav und der Giebel auf die Frontfläche der Nische, auf den Boden und die Wandfläche werfen. Um die Schlagschattengrenzen (die ohnehin in der Figur wegen ihrer Kleinheit nicht sehr deutlich erkennbar werden) nicht komplizierter zu machen, als unumgänglich ist, wurde die unendliche ferne Lichtquelle  $L$  in einer Diagonalebene des Objektes angenommen, so daß  $L'$  mit  $M_\infty$  identisch ist. Von den geradlinigen Schattengrenzen wurden alle Fluchtpunkte nach 104 bestimmt. So wirft z.B. eine zu  $i$  parallele Kante am Giebel einen kurzen Schatten auf eine geneigte Fläche ( $\parallel k$ ) des schräg ansteigenden Gesimses; sein Fluchtpunkt ergibt sich als  $J_\infty L \times K_\infty N_\infty$ .

Den Hauptbestandteil unserer Aufgabe bildet die Darstellung der Nischenfläche mit den an ihr auftretenden Schatten. Man bestimmt zuerst nach 101 das Bild des Basishalbkreises  $f$  und seine vertikale Tangente, die den scheinbaren Umriß des zylindrischen Teiles der Nischenfläche bildet; hierauf zeichnet man wie vorher die Perspektive des Fronthalbkreises  $e$ . Der wahre Umriß des Halbzylinders ist eine auf dem Halbkreise  $c$  endigende Mantellinie. In ihrem Endpunkte beginnt der wahre Umriß  $u$  der kugelförmigen Wölbfläche und endet auf dem Fronthalbkreise  $e$ ;  $u$  ist ein Stück des Kreises, in dem die Kugel von der Polarebene des Auges  $O$  geschnitten wird. Seine Tangente im Anfangspunkte ist von der Mantellinie des Zylinders verschieden, aber die Verbindungsebene beider geht durch das Auge, und folglich berühren sich die scheinbaren Umrisse beider Flächenteile. Der scheinbare Umriß der Wölbfläche ist ein Ellipsenbogen, den man nach 85 unter Benutzung von Krümmungskreisen konstruiert; in seinem Endpunkte berührt er das Bild von  $e$ . Da die Wölbfläche längs  $e$  von einem Zylinder berührt wird, dessen Mantellinien zu  $y$  parallel sind, so berühren sich die Bilder von  $u$  und  $e$  in einem Punkte, dessen Tangente durch  $V_\infty$  geht; hieraus läßt sich derselbe leicht zeichnen.

Die Lichtgrenze auf dem Halbzylinder ist wiederum eine Mantellinie; sie beginnt in dem Punkte  $U$  des Halbkreises  $f$ , dessen Tangente den Grundriß eines Lichtstrahles bildet, und endet im entsprechenden Punkte des Halbkreises  $c$ . Ebendasselbst beginnt die Lichtgrenze  $v$  der Wölfläche und endet auf dem Fronthalbkreise  $e$  in  $V$ ;  $v$  ist ein Hauptkreisbogen, dessen Ebene senkrecht zu den Lichtstrahlen steht; er wird nach 330 Bd. I zuerst im Grund- und Aufriß bestimmt und dann in die Perspektive übertragen. In dem Endpunkte von  $v$  ist die Tangente von  $e$  parallel zu  $l''$ , ihr Bild geht durch  $L_{\infty}''$ .

Der in das Innere der Nische fallende Schlagschatten überdeckt die Lichtgrenze  $v$ . Die Schlagschattengrenze besteht aus drei Teilen. Der erste liegt auf der Mantellinie des Halbzylinders, die von seinem linken Rande Schatten empfängt und endigt auf dem Lichtstrahl durch den linken Endpunkt des Halbkreises  $c$ . Der zweite ist ein Stück der Raumkurve, in welcher der schiefe Lichtzylinder durch  $e$  die zylindrische Wand der Nische trifft; er geht tangential aus dem ersten Teile hervor und ebenso in den dritten über, der auf der Wölfläche liegt. Man findet einzelne Punkte des mittleren Teiles, wenn man die Lichtebene durch eine Mantellinie des Nischenzylinders mit der Frontebene schneidet und hierdurch jedesmal einen Punkt von  $e$  bestimmt, dessen Schatten auf jene Mantellinie fällt und zu der Kurve gehört. Der letzte Teil ist wieder ein Kreisbogen; er endigt auf  $e$  in dem nämlichen Punkt  $V$  wie die Lichtgrenze  $u$ . In der Tat ist dies ein Teil der Durchdringungskurve des Lichtzylinders durch  $e$  mit der Kugel, die bereits den Kreis  $e$  und folglich noch einen zweiten Kreis (Wechselschnitt) gemein haben (239 Bd. I). Es ist der zum Randkreise  $e$  in bezug auf die Lichtgrenze  $u$  symmetrische Hauptkreis der Kugel, seine Bestimmung bietet daher keine Schwierigkeit mehr dar. Bezüglich der Endtangente (in  $V$ ) beachte man den Satz (375 Bd. I), wonach die Tangenten von  $e$  und  $e^*$  zu der von  $v$  und dem Lichtstrahle harmonisch liegen müssen. In der Figur wurde die Bestimmung der Schlagschattengrenze zuerst in Grund- und Aufriß vorgenommen und hieraus die Perspektive abgeleitet (vgl. 93e).

**109. Perspektive eines runden Säulenzustumpfes (Fig. 93).** Die Säule steht auf einer quadratischen Plinthe; ihre Basis besteht aus einem Wulst und einer zylindrischen Platte, an die sich eine in den zylindrischen Schaft übergehende Hohlkehle anschließt. Wir behandeln dieses Objekt als ein Beispiel zur perspektiven Darstellung der Rotationsflächen. Der Meridian der Säulenfläche ist im Aufriß

gezeichnet; er besteht aus einem Halbkreis, dessen Enddurchmesser der Achse parallel liegt, und dessen hohle Seite der Achse zugekehrt ist, weiter aus einem Stück des verlängerten Durchmessers und einem

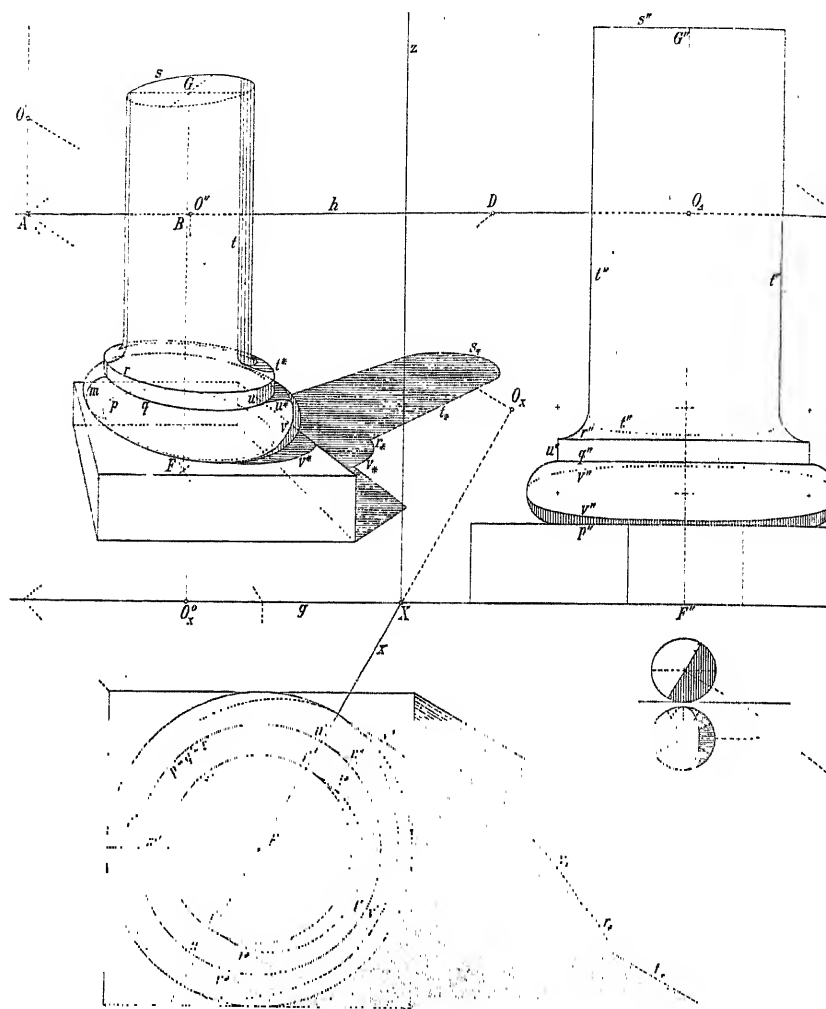


Fig. 93.

Viertelkreis mit der hohlen Seite nach außen, dessen Zentrum wieder auf der Verlängerung jenes Durchmessers liegt; endlich gehört dazu eine Mantellinie des Schaftzylinders. Die Anfangs- bzw. Endpunkte der genannten Teile des Meridians liegen auf den Parallelkreisen  $p$ ,

$q, r, s$ ; die Ebenen des ersten und letzten Parallelkreises begrenzen den Rotationskörper.

Zur Konstruktion der Perspektive sind angegeben: der Hauptpunkt  $A$  und ein Distanzpunkt  $D$  auf dem Horizont  $h$ , die Grundlinie  $g$ , sowie Grund- und Aufriß  $O', O''$  des Auges. Die  $x$ -Achse ist senkrecht zum Grundriß  $l'$  des Lichtstrahles  $l$  (Parallelbeleuchtung) gelegt, um die Schattenkonstruktion in Grund- und Aufriß bequemer und genauer ausführen zu können ( $O'O_x \perp x$ ,  $O_x^0$  auf  $g$ ,  $O_x^0 O'' \perp h$ ,  $O''$  auf  $h$ ). Das umgelegte Auge  $O_0$  ist unzugänglich.  $I, I'$  sind die Fluchtpunkte der Lichtstrahlen und ihrer Grundrisse.

Um das perspektive Bild der Säule zu entwerfen, bilden wir zuerst die Plinthe und die vertikale Achse der Säule ab. Das Bild der letzteren trifft  $h$  in  $B$ .  $O_A$  ist das um  $B$  auf den Horizont niedergelegte Auge  $O$ . Hierauf projizieren wir den parallel zur Bildebene  $\Pi$  liegenden Hauptmeridian; sein Bild zeigt ihn in einer ähnlichen Verkleinerung, die wir kurz den Bildmeridian nennen wollen; er ist in die Figur eingetragen. Die Parallelkreise  $p, q, r, s$  sind nach dem Verfahren in 101 dargestellt; ebenso die scheinbaren Umrisse der zylindrischen Teile. Der scheinbare Umriss des Rotationskörpers ist identisch mit dem eines ähnlich verkleinerten Körpers, dessen Achse in der Bildebene liegt und dessen Meridian der Bildmeridian ist. Zur Darstellung des scheinbaren Umrisses kann man daher das Kegelfverfahren anwenden, wie dies in 87 näher dargelegt ist.

Die Bestimmung der Lichtgrenzlinien, sowie der Schlagschatten auf die Grundebene und auf das Objekt selbst, ist zuerst im Grund- und Aufriß ausgeführt und sodann nach dem in 93 unter  $\epsilon$ ) angegebenen Verfahren in die Perspektive übertragen. Es kommt hierbei namentlich auf die Wulst- und Kehlfläche der Säulenbasis an, und diese sind Teile einer und derselben Kreisringfläche, nur gegeneinander in der Richtung der Achse verschoben. Die Konstruktion der Schatten auf der Ringfläche ergibt sich aus 387 Bd. I; sie benutzt eine dem Ringe einbeschriebene Hilfskugel, die ihn entlang eines Meridianes berührt. Die Lichtgrenze dieser Hilfskugel ist in einem besonderen Grund- und Aufriß bestimmt, wobei die Aufrißebene zum Lichtstrahl parallel vorausgesetzt wurde. Die Lichtgrenzpunkte sind dann in die einzelnen Meridiane der Ringflächen übertragen. In der Figur bedeuten  $t$  die Lichtgrenze auf der Kehlfläche und ihre geradlinige Fortsetzung auf dem Schaftzylinder,  $u$  die Lichtgrenze auf dem Basiszylinder und  $v$  die auf der Wulstfläche. Die Schlagschatten auf die Grundebene sind durch den unteren Index  $*$ , die auf das Objekt fallenden durch den oberen Index  $*$  bezeichnet.



### Zentralkollineation räumlicher Figuren (Reliefperspektive).

110. Zwei Raumfiguren sollen einander Punkt für Punkt in folgender Weise entsprechen:

- a) Die Verbindungslinien entsprechender Punkte  $P$  und  $P_1$  gehen durch ein festes Zentrum  $O$ .
- β) Drei Punkten in gerader Linie entsprechen drei Punkte in gerader Linie und folglich vier Punkten in einer Ebene vier Punkte einer Ebene.
- γ) Jeder Punkt einer festen Ebene  $\Pi$ , der Kollineationsebene, entspricht sich selbst.

Hieraus folgt sofort:

- δ) Entsprechende Strahlen bzw. Ebenen schneiden sich auf der Ebene  $\Pi$ ; jeder Strahl und jede Ebene durch  $O$  entspricht sich selbst; das gleiche gilt mit hin vom Zentrum  $O$ .

Durch diese Eigenschaften ist die Beziehung zwischen den beiden Raumfiguren, die wir als Original und Bild unterscheiden, vollständig bestimmt, sobald hinreichende Bestimmungsstücke angegeben werden, um zu jedem Punkte des Originals den entsprechenden Punkt des Bildes finden zu können. Wir nennen diese geometrische Verwandtschaft eine Zentralkollineation oder Perspektiv räumlicher Figuren<sup>9)</sup>. Von ihr gilt der Satz:

111. Die räumliche Zentralkollineation ist bestimmt durch Angabe des Zentrums  $O$ , der Kollineationsebene  $\Pi$  und zweier sich entsprechender Punkte  $P$  und  $P_1$ , die auf einem Strahle durch  $O$  liegen müssen. Denn zu jedem weiteren Punkte  $Q$  des Originals findet man hiernach den Bildpunkt. Der Strahl  $PQ = i$  schneide nämlich  $\Pi$  in  $J$ , so ist  $i_1 = JP_1$  sein Bild, er liegt in der Ebene  $iO$  und bestimmt mit dem Strahle  $OQ$  den Bildpunkt  $Q_1$ . Den unendlich fernen Punkten der Geraden  $i$  bzw.  $i_1$  entsprechen die Gegenpunkte  $J_\infty$  auf  $i_1$  und  $J_v$  auf  $i$ ;  $J_\infty$  heißt der Fluchtpunkt,  $J_v$  der Verschwindungspunkt ( $OJ_\infty \nparallel J_vJ$ ,  $OJ_v \nparallel J_\infty J$ ). Der unendlich fernen Ebene im Original- bzw. Bildraume entspricht je eine zu  $\Pi$  parallele Gegenebene, nämlich die Fluchtebene  $\Pi_\infty$  und die Verschwindungsebene  $\Pi_v$ . Erstere trägt die Fluchtpunkte, letztere die Verschwindungspunkte aller Geraden des Raumes. Hieraus folgt die Beziehung:

$$(\Pi_v \dashv \Pi) = (O \dashv \Pi_\infty).$$

Betrachtet man die einander entsprechenden Figuren in irgend einer

durch  $O$  gelegten Ebene  $\Delta$ , so zeigt sich, daß sie perspektiv liegen, und zwar ist  $O$  das Zentrum,  $d = \Delta \times \Pi$  die Achse der Perspektive, während  $d_{\infty} = \Delta \times \Pi_{\infty}$  und  $d_v = \Delta \times \Pi_v$  die Gegenachsen bilden (vgl. 166 fig. Bd. I).

Wir bezeichnen im folgenden den Punkt  $O$  als das Auge, die von  $O$  ausgehenden Verbindungslinien entsprechender Punkte als Sehstrahlen und die sich selbst entsprechende Ebene als Spurebene  $\Pi$ .

**112.** Man kann die Zentralkollineation benutzen, um den vom Auge aus hinter der Spurebene  $\Pi$  liegenden und sich ins Unendliche ausdehnenden Raum mit den darin enthaltenen Figuren in dem Raume abzubilden, der zwischen  $\Pi$  und der Fluchtebene  $\Pi_{\infty}$  liegt. Diese Art der Abbildung von Raumfiguren durch andere Raumfiguren nennt man Reliefperspektive. Mit den Reliefs der bildenden Kunst hat sie nur wenig zu tun. Denn der Künstler behandelt das Relief wie eine durch Erhabenheiten des Materials hervorzubringende Zeichnung. Dies ist die ursprüngliche Form der Darstellung, das Flachrelief. Beim Hochrelief lösen sich einzelne Figuren vom Hintergrunde ab; sie werden aber dann „rund“, d. h. in ihrer wirklichen Gestalt gebildet. Man erkennt also, daß hier kein einheitliches Darstellungsprinzip angewandt wird, wie dies bei der malerischen Perspektive durchführbar ist, sondern die Vermittelung zwischen den verschiedenartigen Darstellungen der Figuren im Vordergrund und Hintergrund bleibt dem subjektiven Ermessen des Künstlers überlassen. Bedeutende Künstler haben versucht, die Gesetze der Reliefperspektive in die plastische Darstellung einzuführen. Aber im strengen Sinne konnte dies nicht geschehen; denn aus praktischen, wie aus ästhetischen Gründen müssen bei den nach dem Hintergrunde (der Fluchtebene) zu immer mehr sich verflachenden Figuren die Zwischenräume wegfallen. Hiervon abgesehen, verträgt die Reliefperspektive keine Veränderung des Gesichtspunktes, ohne das Bild verzerrt erscheinen zu lassen. Trotz alledem kann aber die Kenntnis ihrer Regeln dem bildenden Künstler nützlich sein. Sie kommen auch in Verbindung mit den Regeln der malerischen Perspektive in der sog. Theaterperspektive zu Anwendung.

**113.** Gegeben sei das Auge  $O$ , die Spurebene  $\Pi$ , sowie die Fluchtebene  $\Pi_{\infty}$ , die jedem unendlich fernen Punkte den Durchstoßpunkt eines Sehstrahles zuordnet; dann ist die Kollineation bestimmt. Wir stellen  $\Pi$  vertikal; die Horizontalebene  $H$  durch  $O$  schneide  $\Pi$  in  $h$  und  $\Pi_{\infty}$  in  $h_{\infty}$  (Fig. 94);  $h_{\infty}$  heißt der Horizont. Die Grundebene  $\Gamma$ , auf der sich die Objekte befinden, liegt

parallel zu  $H$  und schneidet  $\Pi$  in der Grundlinie  $g$ . Durch Auge  $O$  ziehen wir die Normale zu  $\Pi$ , sie trifft die Ebenen  $\Pi_\infty, \Pi_v$  bez. in  $A, A_\infty, A_v$ .  $A_\infty$  heißt der Hauptpunkt,  $OA_\infty$  Distanz und  $AA_\infty$  die Tiefe des Reliefs. Der in  $\Pi_\infty$  mit  $i$

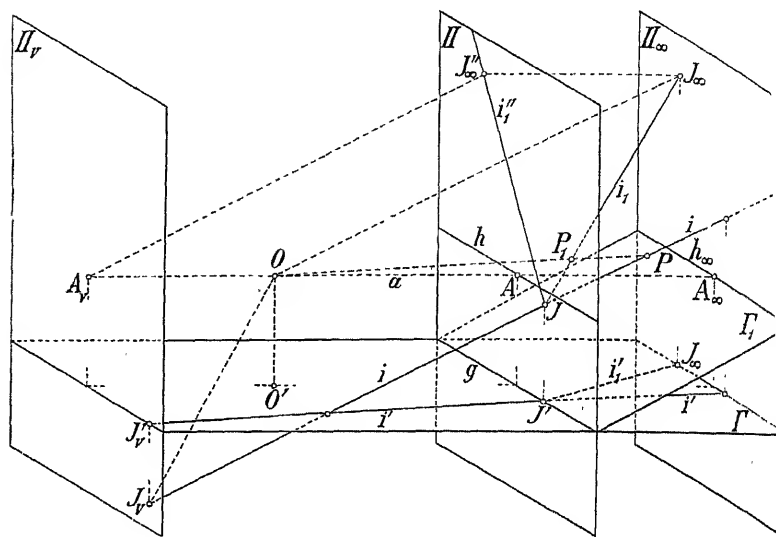


Fig. 94.

Radius =  $OA_\infty$  um  $A_\infty$  beschriebene Distanzkreis trifft  $h_\infty$  in den Distanzpunkten  $D_\infty$  und  $E_\infty$ .

114. Die Abbildung einer Geraden  $i$  erfolgt nun so, daß man zuerst ihren Spurlpunkt  $J$  in  $\Pi$  und ihren Fluchtpunkt  $J_\infty$  in  $\Pi_\infty$  aufsucht; die Reliefgerade  $i_1$  verbindet  $J$  mit  $J_\infty$ . Parallele Geraden haben einerlei Fluchtpunkt, nach dem ihre Bilder konvergieren; Parallele zu  $\Pi$ , insbesondere die Vertikalen, haben parallele Bilder.

Um einen Punkt  $P$  abzubilden, legt man durch ihn eine Gerade und schneidet ihr Bild  $i_1$  mit dem Sehstrahle  $OP$  in  $P_1$ .

Die Abbildung einer Ebene  $E$  ergibt sich als Verbindungsebene  $E_1$  ihrer Spurlinie  $e = E \times \Pi$  und ihrer Fluchtlinie  $e_\infty$ , die in  $\Pi_\infty$  als Spur der Parallelebene durch das Auge  $O$  erhalten wird. Speziell verbindet das Relief  $\Gamma_1$  der Bodenfläche  $\Gamma$  die Grundlinie  $g$  mit dem Horizonte  $h_\infty$ .

115. Das Objekt sei durch seinen Grund- und Aufriß definiert. Als Grundrißebene benutzen wir  $\Gamma$ , als Aufrißebene  $\Pi$ .

Zur Konstruktion des räumlichen Abbildes oder Reliefs dienen folgende Sätze.

$\alpha$ ) Die in der Ebene  $\Pi$  aus dem Augpunkte  $A_v$  entworfene Perspektive des Objektes ist mit dem Aufriß seines Reliefs identisch. In der Tat: eine beliebige Gerade  $i$ , ihre Reliefgerade  $i_1$  und deren Aufriß  $i_1''$  haben den Spurpunkt  $J$  gemein und sind paarweise perspektiv aufeinander bezogen, nämlich  $i$  und  $i_1$  aus dem Zentrum  $O$ ,  $i_1$  und  $i_1''$  aus dem unendlich fernen Punkte von  $OA_\infty$  und folglich  $i$  und  $i_1''$  aus einem auf  $OA_\infty$  gelegenen Zentrum (162 Bd. I). Letzteres ist der Punkt  $A_v$ , weil der Aufriß  $J_\infty''$  des Fluchtpunktes  $J_\infty$  dem unendlich fernen Punkte von  $i$  entspricht und  $A_v J_\infty \parallel O J_\infty \parallel i$  ist.

$\beta$ ) Der Grundriß des Reliefs geht aus dem des Gegenstandes durch eine Zentralprojektion in der Grundebene  $\Gamma$  hervor; ihr Zentrum ist der Grundriß  $O'$  des Auges, ihre Achse ist die Grundlinie  $g$  und ihre Fluchtlinie  $\Gamma \times \Pi_\infty$ . Der Grundriß des Objektes liegt zu seinem Relief perspektiv aus dem Zentrum  $O$ ; andererseits ist der Grundriß des Reliefs die senkrechte Projektion vom Relief des Grundrisses, weil Vertikalen Vertikale entsprechen. Hieraus folgt nach 162 Bd. I die Behauptung.

$\gamma$ ) Legt man das Relief des Grundrisses um die Grundlinie  $g$  in die Spurebene  $\Pi$  um, so bleibt es zum Grundriß des Objektes perspektiv; das neue Zentrum ist die Umlegung  $O_1$  von  $O$  in die Verschwindungsebene  $\Pi_v$  um die Linie  $\Gamma \times \Pi_v$  (163 Bd. I). Es folgt also: Die in der Ebene  $\Pi$  aus dem Augpunkte  $O_1$  entworfene Perspektive des Grundrisses ist mit seinem Relief kongruent.

Als Beispiel für die Reliefperspektive ist ein Obelisk auf quadratischem Sockel behandelt. Beide, das Objekt und sein Relief, sind in Figur 95 in schiefer Projektion dargestellt. Es erscheint nicht nötig, näher auf die Konstruktion einzugehen.

**116.** Die Zentralkollineation des Raumes umfaßt als Spezialfälle:

$\alpha$ ) die perspektive Affinität räumlicher Figuren, wenn das Zentrum  $O$  ein unendlich ferner Punkt ist;

$\beta$ ) die perspektive Ähnlichkeit, wenn die Kollineations-ebene  $\Pi$  die unendlich ferne Ebene ist;

$\gamma$ ) die Kongruenz, wenn  $O$  und  $\Pi$  beide unendlich fern liegen.

Die Zentralkollineation kann dazu dienen, aus den Eigenschaften einer einfach definierbaren Fläche oder Kurve die aller ihrer kollinearverwandten Flächen und Kurven abzuleiten. In ähnlicher Weise, wie man alle Kegelschnitte als Zentralprojektionen

eines Kreises erklären und untersuchen kann, würde man z. B. Oberflächen zweiten Grades ableiten können, und zwar Nichtregelflächen 2. Grades aus der Kugel, die Regelflächen aus Rotationshyperboloid, die Kegel- und Zylinderflächen 2. Grades aus dem Rotationskegel. Je nachdem eine Kugel die Verschwindungsebene  $\Pi_v$  nicht schneidet, berührt oder schneidet, geht sie d. Zentralkollineation über in ein Ellipsoid, ein elliptisches Paraboloid oder in ein zweischaliges Hyperboloid. Ein

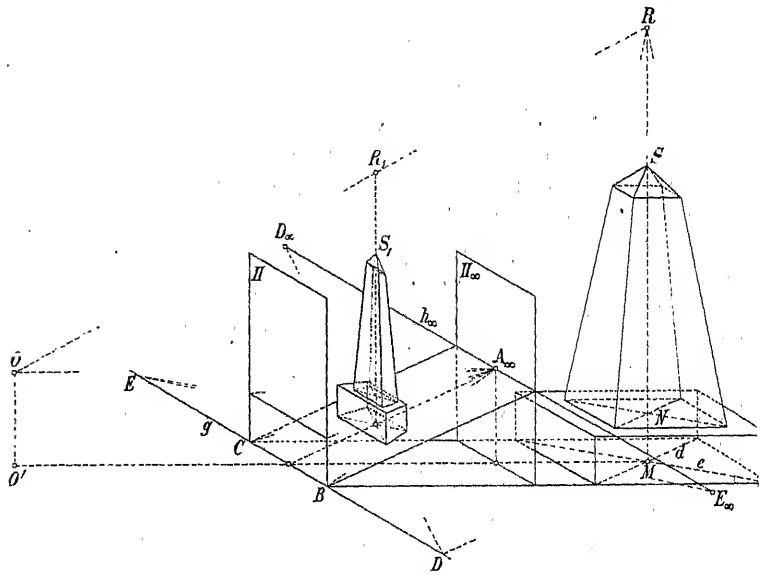


Fig. 95.

schaliges Rotationshyperboloid ergibt im allgemeinen als Bild ein einschaliges Hyperboloid; nur wenn der Schnitt der Originalfläche mit der Verschwindungsebene  $\Pi_v$  in ein Linienpaar zerfällt also  $\Pi_v$  zur Tangentialebene wird, ist das Bild ein hyperbolisches Paraboloid. Ein Rotationskegel ergibt als Bild im allgemeinen einen elliptischen oder schiefen Kreiskegel; liegt aber seine Spitze in der Verschwindungsebene, so wird die kollinear-verwandte Fläche ein elliptischer, parabolischer oder hyperbolischer Zylinder, je nachdem die Verschwindungsebene keine, eine oder zwei Mantellinien des Originalkegels enthält.